

Optimale Isotopentrennung durch Thermodiffusion

von
Eberhard Franck
aus
Nürnberg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546214_0084

Optimale Isotopentrennung durch Thermodiffusion

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Eberhard Franck

aus

Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung : 23. Mai 1968
Dekan : Prof. Dr. W. Haupt
Erstberichterstatter : Prof. Dr. R. Fleischmann
Zweitberichterstatter : Prof. Dr. L. Waldmann

INHALT

	Seite
Zusammenfassung	1
Bezeichnungen	3
<u>EINLEITUNG</u>	
Allgemeiner Überblick	5
Problemstellung	7
<u>I. HYDRODYNAMISCHE THEORIE DES TRENNROHRS</u>	
1. Thermodiffusionseffekt	9
2. Vervielfachungsprinzip im Trennrohr	11
3. Transportgleichung des Trennrohrs	13
4. Konvektions- und Entnahmestrom	20
5. Transportfaktoren	22
6. Formfaktoren	24
7. Lösungen der Transportgleichung	28
<u>II. THERMODYNAMISCHE OPTIMIERUNG</u>	
8. Thermodynamisches Trennpotential	35
9. Maximum des Trennpotentials	37
10. Thermodynamische Trennleistung	45
11. Maximum der Trennleistung	47
12. Thermodynamischer Wirkungsgrad	54
13. Maximum des Wirkungsgrades	56
14. Thermischer Energiestrom	58
15. Minimum des Energiestroms	60
<u>III. GEOMETRISCHE DIMENSIONIERUNG</u>	
16. Planparallele Optimierung	62
17. Energetisch optimale Plattengeometrie	63
18. Wirkungsgrad optimaler Plattenkaskaden	67
19. Zylindrische Optimierung	71
20. Energetisch optimale Zylindergeometrie	78
21. Wirkungsgrad optimaler Zylinderkaskaden	85

<u>IV. GRENZEN DER OPTIMIERUNG</u>	Seite
22. Turbulenzgrenze	92
23. Lineare Näherung	96
24. Nichtlineare Lösung	102
25. Duale Lösung	107
<u>V. PRAKTISCHE OPTIMIERUNG</u>	
26. Transformationseigenschaften	118
27. Energetisch optimale Stufenkaskaden	124
28. Minimum der Anlaufzeit	127
<u>VI. VERGLEICH VON THEORIE UND EXPERIMENT</u>	
29. Anlaufzeit	132
30. Trennschärfe	133
31. Transport	136
32. Wirkungsgrad	138
33. Anwendungsmöglichkeiten	147
<u>ANHANG</u>	
Berechnungsschema	153
Literatur	158

Zusammenfassung

Die Optimierung des Thermodiffusionsverfahrens mit zylindrischer Trennröhrgeometrie führt auf einen konisch-pyramidenförmigen Röhrtyp.

Sowohl die Weite als auch der Umfang des Trennspaltes nehmen entlang der Röhrlänge vom Einspeisende zum Entnahmeende hin ab. Die Pyramidenbasis arbeitet dadurch mit hohem Transport, die Pyramiden spitze mit höchster Trennschärfe. Die Optimalbedingungen für Transport und Trennschärfe werden damit gleichzeitig nebeneinander wirksam. Sie ergänzen sich zu einer energetisch optimalen Arbeitsteilung. Zugleich wird hierdurch das Minimum der Anlaufzeit approximiert.

Wegen der freien Wahl des Arbeitsdruckes ist jedes vorgegebene Trennproblem durch eine unendliche Mannigfaltigkeit energetisch optimal arbeitender Trennröhrkaskaden lösbar. Diese Lösungsgesamtheiten werden durch Invarianzeigenschaften zusammengefaßt und beim Übergang zu anderen Trennproblemen durch Transformationseigenschaften geordnet. Normierte Extremalfelder lassen die theoretischen Zusammenhänge zur Gewinnung der Röhrgeometrie und des optimal erreichbaren Wirkungsgrades graphisch überblicken.

Der maximale Wirkungsgrad dieser optimierten Thermodiffusionskaskaden hängt vom gewünschten Entnahmetransport ab: Er steigt beim Übergang von kleinen zu größeren Laboranlagen zunächst linear mit der optimalen Sollentnahme an (wenn man gleiche Anfangs- und Endkonzentration fordert). Bei technischen Großanlagen nähert er sich dann asymptotisch einer prinzipiellen oberen Grenze. Dabei kann er aber die obere Schranke $\eta_{th} < \frac{\alpha^2}{100} < \frac{1}{400} \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2$ wegen der Irreversibilität des Thermodiffusionseffektes grundsätzlich nicht überschreiten.

Bisher wurde die Isotopentrennung durch Thermodiffusion fast ausschließlich im Labormaßstab durchgeführt (Ausbeute $\leq$ mg/Tag, Wirkungsgrad $\eta_{th} \approx 10^{-8}$). In diesem Anwendungsbereich ist eine

wesentliche Leistungssteigerung des Trennrohrs (entgegen Dickel 1950/65) nicht mehr möglich: Es läßt sich zeigen, daß die bekannten Experimente von Clusius und Dickel (1939) bereits empirisch nahezu das Optimum des Wirkungsgrades für Laboranlagen erreichten.

Bei Großanlagen (Ausbeute $\geq$ g/Tag) ist jedoch eine Steigerung des Wirkungsgrades (in Übereinstimmung mit Dickel 1950/65) um 1 bis 2 Zehnerpotenzen möglich.

Das vorliegende Kaskadenmodell führt im Grenzfall entnahmefreier Laboranlagen (zylindrische Drahtrohre) auf die Optimierung von Waldmann (1939). Es stimmt im Grenzfall leistungsstarker Industrieanlagen (planparallele Plattenpaare) mit der Optimaltheorie von Dickel (1963) u.a. überein.

BezeichnungenGaskinetische Größen:

- α = Thermodiffusionsfaktor
 D = Selbstdiffusionskoeffizient
 η = Zähigkeit
 λ = Wärmeleitfähigkeit
 ρ = Gasdichte
 $\bar{\rho}$ = Mittlere Gasdichte
 c = Isotopenkonzentration
 c' = $1-c$ = Konzentration des Begleit isotops
 c_A = Anfangskonzentration
 c_E = Endkonzentration

Hydrodynamische Größen:

- v = Strömungsgeschwindigkeit
 $\bar{v}$ = Mittlere Strömungsgeschwindigkeit
 j = Massenstromdichte des Isotops
 s = Massenentnahme/Zeit = Entnahmestrom
 τ = $s(c_E - c)$ = Eigentransport des Rohres
 τ_A = Hcc' = Anfangstransport
 H = Aufbau-Transportfaktor
 K = $K_k + K_d$ = Rücktransportfaktor
 K_k = Rücktransportfaktor durch Konvektion
 K_d = Rücktransportfaktor durch Diffusion

Thermodynamische Größen:

- T_i = Heizmantel-Temperatur (innen)
 T_a = Kühlmantel-Temperatur (außen)
 ΔT = $T_i - T_a$ = Temperaturgefälle
 $\bar{T}$ = Mittlere Trenngas-Temperatur
 R = Universelle Gaskonstante
 $\dot{Q}$ = Wärmemenge/Zeit = Wärmestrom
 $\dot{S}_a$ = Wärmestromentropie/Zeit = Wärmeentropiestrom
 $\dot{S}_E$ = Entmischungsentropie/Zeit = Entmischungsentropiestrom

$$\eta_{th} = \frac{|\dot{S}_E|}{|\dot{S}_Q| + |\dot{S}_E|} = \text{Thermodynamischer Wirkungsgrad}$$

$$n = \frac{\dot{Q}_{ideal}}{\dot{Q}_{real}} = \text{Thermodynamischer Nutzungsgrad}$$

Geometrische Größen:

$$x = R_a - R_i = \text{Trennspaltweite}$$

$$y = 2\pi \frac{R_a + R_i}{2} = \text{Mittlerer Rohrumfang}$$

$$z = \text{Rohrlänge}$$

$$\xi = \frac{x}{R_o} = \text{Reduzierte Trennspaltweite}$$

$$\eta = \frac{y}{R_o} = \text{Reduzierter mittlerer Rohrumfang}$$

$$\varphi = \frac{z}{R_o} = \text{Reduzierte Rohrlänge}$$

$$R_i = \text{Heizmantel-Radius (innen)}$$

$$R_o = \text{Kühlmantel-Radius (außen)}$$

$$f = \text{Rohrquerschnittsfläche}$$

$$F = \text{Rohrmantelfläche}$$

$$P = \frac{R_a + R_i}{R_a - R_i} = \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1} = \frac{\eta}{\pi \xi} = \frac{\text{Trennspaltweite}}{\pi \cdot \text{Mittl. Rohrumfang}}$$

$$\varphi = \text{Formfaktor von H}$$

$$\psi = \text{Formfaktor von } K_k$$

$$\chi = \text{Formfaktor von } K_d$$

Abgeleitete Hilfsgrößen:

$$h = \frac{\varphi^2 \alpha q}{3 \cdot 2^8 \eta} \cdot \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 = \text{Gaskinetischer Anteil von H}$$

$$k_k = \frac{\varphi^3 q^2}{3^2 \cdot 2^{16} \eta^2 D} \cdot \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 = \text{Gaskinetischer Anteil von } K_k$$

$$k_d = D \varphi = \text{Gaskinetischer Anteil von } K_d$$

$$R_o = \sqrt[3]{3 \cdot 2^7 \frac{D \eta}{g \varphi} \frac{T}{\Delta T}} = \text{Charakteristische Trennspaltweite}$$

$$L_o = R_o^4 \frac{k_k \psi}{h \varphi} = \text{Charakteristische Rohrlänge}$$

$$s_o = R_o^4 \pi P h \varphi = \text{Charakteristischer Entnahmestrom}$$

$$\dot{Q}_o = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_o}{R_i}} = \text{Charakteristischer Wärmestrom}$$

$$\sigma = \frac{s}{s_o} = \text{Reduzierter Entnahmestrom}$$

$$\Sigma = 2\sigma \frac{c_E - c}{c c'} = \text{Reduzierter Transport}$$

EINLEITUNG

Allgemeiner Überblick

Alle Isotopentrennverfahren sind aufwendig - teils in der apparativen Ausrüstung, teils im Energieverbrauch, meist in beidem. So stehen die Großtrennanlagen zur Darstellung spaltbaren Urans und schweren Wassers gemessen an Investition und Energieverbrauch an der Spitze aller industriellen Einrichtungen. Die Gewinnung dieser Grundstoffe zur Freisetzung von Kernenergie stellt das bisher größte wissenschaftlich-technische Einzelproblem dar [71].

Eine v o l l k o m m e n e R e i n d a r s t e l l u n g von Isotopen gelingt grundsätzlich nach der elektromagnetischen Methode. Man kombiniert hierzu das Prinzip des Massenspektrographen mit einer extrem lichtstarken Ionenoptik (Trennspektrograph, Lawrence 1942/3).

Andere Trennverfahren beruhen auf den Isotopieeffekten der statistischen Thermodynamik. Diese Elementareffekte ergeben bei einmaliger Anwendung nur winzige Konzentrationsverschiebungen. Eine sinnreiche Wiederholung des Einzelprozesses ermöglicht aber auch bei den statistischen Verfahren eine wirksame Trennung. Hierzu baut man ein Netzwerk von geeignet hintereinander und parallel arbeitenden Trennelementen in Form einer T r e n n - k a s k a d e.

Der Grundgedanke dieser Kaskadierung wurde erstmals von Hertz (1932) mit Erfolg auf das Diffusionsverfahren angewandt. Dasselbe Vervielfachungsschema der iterierten Rückführung von Isotopenströmen liefert das bekannte Gegenstromprinzip. Dieser Verstärkungsmechanismus läßt auf einfache Weise brauchbare Trennverfahren ausbilden.

Zu den bisher erfolgreichsten statistischen Methoden gehören:

1. Diffusion durch poröse Membranen oder strömendes Hilfsgas:
Trenndiaphragma (Hertz 1932/4)
2. Chemischer Austausch im Gegenstrom: Trennsäule (Urey 1933)

3. Austauschdestillation im Gegenstrom:
Trennkolonne (Keesom 1934)
4. Thermodiffusion im Gegenstrom:
Trennröhr (Clusius, Dickel 1938)
5. Druckdiffusion im Gegenstrom:
Trennzentrifuge (Martin, Kuhn 1940; Jensen, Harteck 1942;
Groth 1957)
6. Druckdiffusion im freien Molekularstrahl:
Trenndüse (Becker 1955)
7. Ionenwanderung im Gegenstrom:
Trennzelle (Brewer, Breit, Klemm 1947).

Problemstellung

Die erstmalige vollständige Isotopentrennung in Mengen von einigen Gramm gelang durch Thermodiffusion im Gegenstrom. Die Erfolge des Thermodiffusions-Trennrohrs führten unmittelbar auf die Frage nach seiner optimalen Leistungsfähigkeit.

Onsager[61][50] gab 1939 eine erste allgemeine Abschätzung für die obere Grenze des Wirkungsgrades. Die ersten Arbeiten zur Optimierung des Trennrohrs führten auf universelle Kaskadierungsprinzipien, die sich auch für die anderen statistischen Verfahren als gültig erwiesen. Sie fanden ihren Niederschlag in einer einheitlichen Kaskadentheorie[15]. Dieses allgemeine Schema beschreibt den Aufwand der energetisch optimalen Vervielfachung des Elementareffekts durch eine universelle Wertfunktion von Peierls und Dirac (1940/2). Sie bildete als übergeordneter Gesichtspunkt die Grundlage für den Bau der Uran-Großtrennanlagen.

Die bisherigen Arbeiten über die Optimierung des Isotopentrennrohrs [51][50][15][2][21][23] umfassen einen Zeitraum von fast 30 Jahren und haben bereits in die Lehrbuchliteratur[7][42][53] Eingang gefunden.

Bei der Anwendung dieser Optimaltheorie treten aber starke Abweichungen von den experimentellen Ergebnissen der Laborversuche auf. Sie machen sich in einer Verschlechterung des theoretisch erreichbaren Wirkungsgrades um 1 bis 2 Zehnerpotenzen bemerkbar.

Zur Klärung dieser Widersprüche zwischen Theorie und Experiment wurden in den letzten Jahren verschiedene Untersuchungen vorgenommen:

Die theoretische Berechnung der Gasströmung in den zylindrischen Trennrohren wurde für reale Modellmoleküle mit erheblichem Rechenaufwand verbessert[56][65][68][67]. Aus den genaueren Aussagen über die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitung, Zähigkeit, Diffusion und Thermodiffusion ergab sich eine detailliertere Bestimmung der Trennrohrkenngrößen.

Andererseits wurde in einer Reihe neuerer Arbeiten (1963/6) die Kaskadentheorie der Trennröhre auf der Grundlage des Onsager'schen Optimalprinzips [61] weiter ausgebaut. Hierdurch gelang aber keine Überbrückung der genannten Schwierigkeiten. Die Diskrepanzen wurden daraufhin als grundsätzlich vermeidbar angesehen und durch experimentell-apparative Unvollkommenheiten erklärt [19][81][24][76].

Anlaß der vorliegenden Arbeit ist der Versuch, zur weiteren Klärung dieser Diskrepanzen beizutragen.

Aufgabe der Arbeit ist die Lösung folgenden Problems: Eine vorgegebene Isotopenmischung soll mit minimalem Aufwand in eine angereicherte Fraktion gegebener Endkonzentration (und eine abgereicherte Abfallfraktion) zerlegt werden. Es ist festzustellen, unter welchen Betriebsbedingungen und durch welche Dimensionierung dieses Problem gelöst werden kann.

Ziel der vorliegenden Optimaltheorie des Trennröhrprozesses ist es, für jeden Bedarfsfall - sowohl für den praktisch wichtigen Laborbetrieb, als auch für einen eventuellen Großbetrieb - ein Konzept zur bestmöglichen Dimensionierung in die Hand zu geben.

Die ersten Kapitel führen in die physikalischen Grundlagen des Trennröhrprinzips ein. Sie bestehen zum größeren Teil aus einer knappen Zusammenfassung älterer Arbeiten. Die bisherige Optimaltheorie entwickeln wir neben unserer Lösung her. Dadurch werden die Unterschiede und Berührungspunkte bei der Klärung der Verhältnisse deutlicher. In einer Diskussion der resultierenden Optimalbedingungen werden die Gültigkeitsgrenzen beider Lösungen untersucht. Ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment soll dann anhand eines charakteristischen Beispiels über die optimale Leistungsfähigkeit des Thermodiffusionsverfahrens entscheiden.

I HYDRODYNAMISCHE THEORIE DES TRENNROHRS

1. Thermodiffusionseffekt

Ausgangspunkt der kinetischen Behandlung von Transporterscheinungen in Gasen ist die Boltzmann-Gleichung. Die Lösung dieser Integrodifferentialgleichung liefert den Zusammenhang zwischen den molekularen Zweierstößen und den phänomenologischen Transporterscheinungen (Wärmeleitung, Diffusion, Zähigkeit).

Enskog (1911/17) und Chapman (1916) untersuchten den allgemeinen Fall eines aus zwei Molekülsorten bestehenden Gasgemisches. Sie berechneten die zugehörige Geschwindigkeitsverteilungsfunktion als Störung der Maxwell'schen Gleichgewichtsverteilung. Dabei entdeckten sie einen neuen Transporteffekt:

Neben dem vermischenden Konzentrationsdiffusionsstrom infolge eines Konzentrationsgefälles $\text{grad } c$

$$j = -Dg \cdot \text{grad } c \quad (1)$$

existiert bei Vorliegen eines Temperaturgefälles $\text{grad } T$ ein entmischender Thermodiffusionsstrom

$$j = D_T g \cdot \text{grad } T. \quad (2)$$

Dabei ist $D_T = \frac{D}{T} \alpha c c'$, α = Thermodiffusionsfaktor, cc' = Massenwirkungsprodukt der Stoßpartner⁺⁾ .

Dieser Thermodiffusionseffekt bewirkt, daß in Gebieten unterschiedlicher Temperatur T auch unterschiedliche Konzentrationen c bzw. $c' \equiv 1-c$ der beiden Gaskomponenten auftreten. Er führt so zu einer partiellen Entmischung der Gase.

⁺⁾ Wir beschränken uns im Folgenden auf binäre Gasgemische $c, 1-c$. Die Behandlung mehrkomponentiger Systeme wird durch die Tatsache zugänglich, daß die relative Konzentration zweier Komponenten unabhängig ist von der Anwesenheit einer dritten Komponente [53].

Dieser Teilchentransport läßt sich mit Hilfe der anschaulichen Näherungsmethode der freien Weglänge plausibel machen: Die mittlere Geschwindigkeit der beiden Molekülsorten ist verschieden. Ihre Ortsabhängigkeit führt daher zu einer Konzentrationsverschiebung.

Die Thermodynamik irreversibler Prozesse hat mit Hilfe der Onsager'schen Reziprozitätsrelationen eine systematische Theorie des Thermodiffusionseffektes und seiner Umkehrung, des Diffusionsthermoeffektes, gegeben [58] [80] [44].

Nach der kinetischen Theorie [80] ist die Thermodiffusion ein subtiler Differenzeffekt, der sehr empfindlich vom zugrundegelegten Molekülmodell und von der Temperatur abhängt: Die Temperaturabhängigkeit $\alpha(T)$, stellt beim Vergleich von Theorie und Experiment die schärfste Prüfung für die atomistischen Potentialmodelle dar.

Die sehr komplexe Theorie liefert den Thermodiffusionsfaktor α als komplizierte Funktion der Temperatur, der Massenverhältnisse und Durchmesser.

Die Berechnung vereinfacht sich einigermaßen, wenn man isotope Moleküle betrachtet, da hier wegen der gleichen Elektronenhüllen chemisch identischer Stoßpartner der Thermodiffusionseffekt vorwiegend vom Massenverhältnis m/m' bestimmt wird.

Für das klassische Modell starrer Kugeln ergibt die Rechnung von Enskog-Chapman einen Thermodiffusionsfaktor

$$\alpha_{starr} \approx \frac{m - m'}{m + m'} \approx \frac{\Delta m}{2m} .$$

Für die differenzierten Molekülmodelle realer Gase macht man die Produktzerlegung

$$\alpha = \alpha_{starr} \cdot R_T .$$

Dabei enthält α_{starr} die Massenabhängigkeit, der Reduktionsfaktor $|R_T| \leq 1$ das Wechselwirkungspotential und die Temperaturabhängigkeit [37] ⁺⁾ .

Eine systematische Behandlung des elementaren Thermodiffusions-effektes im tieferen Zusammenhang mit den anderen Transporterscheinungen in Gasen findet man in dem umfassenden Handbuch-artikel von Waldmann [80].

2. Vervielfachungsprinzip im Trennrohr

Kurz nach der Entdeckung der Isotopie der Elemente (J.J.Thomson 1913) machte Chapman (1919) den Vorschlag [9], eine Trennung der Isotope durch den Thermodiffusionseffekt in Angriff zu nehmen.

Wegen des meist nur sehr kleinen Massenunterschiedes läßt sich hiermit aber nur eine sehr kleine Verschiebung der Isotopenkonzentration erzielen. Es wäre eine sehr große Anzahl diskreter Stufen in Kaskadenschaltung erforderlich, um durch iterierte Anwendung des Elementareffekts zu einer merklichen Anreicherung zu gelangen: Die praktische Verwendbarkeit des Thermodiffusions-effekts wurde von Mulliken [59] (1922) diskutiert mit dem Ergebnis, daß er als Grundlage eines Trennverfahrens keine Vorzüge gegenüber anderen Isotopieeffekten aufweist.

Die bekannten Experimente von Clusius und Dickel [10] (1938) zeigten aber, daß man über eine Kombination von Thermodiffusion und Thermokonvektion den Elementareffekt durch den hydrodynamischen Mechanismus des Gegenstromprinzips auf bestrickend einfache Weise mehr als 10^3 -mal vervielfachen und damit praktisch reine Isotope gewinnen kann:

⁺⁾ Da für reale Moleküle stets $|R_T| < 1$ gilt, läßt sich hieraus bei gegebenem relativem Massenunterschied $\Delta m/m$ der maximal mögliche Thermodiffusionsfaktor α abschätzen.

Man füllt das gasförmige Isotopengemisch⁺) in ein langes vertikales Rohr. In seiner Achse ist ein Glühdraht gespannt. Die Außenwand ist wassergekühlt. Dadurch entsteht eine Konvektionsströmung. Sie ist am heißen Draht aufwärts, an der kalten Wand abwärts gerichtet. In Richtung des radialen Temperaturgefälles tritt durch den Thermodiffusionseffekt eine geringfügige Entmischung auf. Durch den Gasumlauf treten dauernd Gasschichten in Gegenstromaustausch, die sich noch nicht im Thermodiffusionsgleichgewicht (1)(2) befinden (Abb.1):

$$j_1 > j_2$$

Durch den Gasumlauf des vertikalen Konvektionsstroms j_3 wird dann der horizontale Konzentrationsgradient über die gesamte Rohrlänge vervielfacht.

Wenn hierbei die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit $\bar{v}_k$ etwa gleich der mittleren Diffusionsgeschwindigkeit $\bar{v}_d$ der gewünschten Moleküle von der kalten zur heißen Rohrwand ist,

$$\bar{v}_k \approx \bar{v}_d$$

dann tritt ein wirkungsvoller Transport der gewünschten Isotope längs des Rohres auf. Diese Gegenstromverstärkung baut von den Rohrenden her eine vertikale Konzentrationsschichtung auf: Der elementare Thermodiffusionseffekt wird im Trennrohr kontinuierlich von selbst kaskadiert. Er liefert auf einfachste Weise eine äußerst wirksame Isotopenquelle.

⁺) Voraussetzung ist, daß eine geeignete gasförmige Verbindung existiert. Die Behandlung der Flüssigkeitstrennung[82][2] verläuft formal völlig analog.

3. Transportgleichung des Trennrohrs

Der ersten quantitativen Theorie des Trennprozesses von Waldmann [78] [79] (1939) folgten weitere Beiträge von v.d.Grinten [43] (1939); Furry, Jones, Onsager [40] (1939); Debye [18] (1939); Bardeen [3] (1940); Jensen [48] (1941); Fleischmann, Jensen [37] (1942); Jones, Furry [50] (1946); Majumdar [54] (1951); Alexander [2] (1960); Raman, Saxena [68] (1962).

Die grundlegenden Zusammenhänge und Ergebnisse dieser hydrodynamischen Theorie des Trennrohrs werden im Folgenden als Voraussetzung für die anschließende Optimierung zusammengefaßt.

Zur quantitativen Beschreibung des Zusammenwirkens von Konvektion und Diffusion untersucht man den im Trennrohr fließenden Massenstrom des gewünschten Isotops (Abb. 1).

Er besteht aus folgenden Teilströmen:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. Radialer Thermodiffusionsstrom | $j_1 = \varrho D \alpha c' \frac{1}{T} \text{grad } T$ |
| 2. Radialer Rückdiffusionsstrom | $j_2 = \varrho D \frac{dc}{dx}$ |
| 3. Axialer Konvektionsstrom | $j_3 = \varrho c v_k$ |
| 4. Axialer Entnahmestrom | $j_4 = \varrho c v_s$ |
| 5. Axialer Rückdiffusionsstrom | $j_5 = \varrho D \frac{dc}{dz}$ |

Wir betrachten sie in dieser Reihenfolge:

1. Der radiale Thermodiffusionsstrom (2)

bedingt den Elementareffekt: leichte Moleküle diffundieren bevorzugt zur heißen Wand, schwere zur kalten Wand (für $R_T < 0$ umgekehrt).

2. Der radiale Rückdiffusionsstrom (1)

ist die unmittelbare Gegenwirkung der radialen Entmischung. Er befolgt das Fick'sche Gesetz der gewöhnlichen Konzentrationsdiffusion.

Prinzip der Trennung

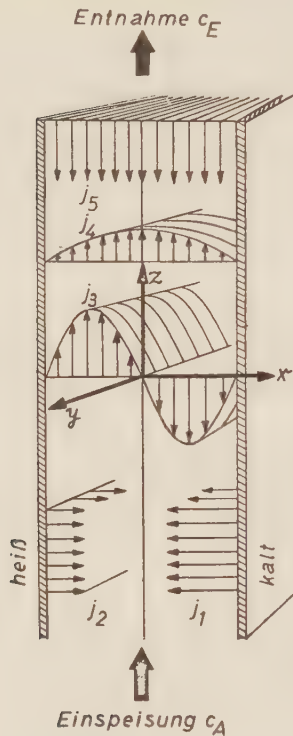


Abb.1 : Längsschnitt durch den Trennspace zwischen zwei unendlich ausgedehnten planparallelen Platten.

Dargestellt ist das Zusammenwirken der Isotopenströme zum Aufbau der Konzentrationsschichtung im Trennrohr:

- j_1 = radialer Thermodiffusionsstrom
- j_2 = radialer Rückdiffusionsstrom
- j_3 = axialer Konvektions - Gegenstrom
- j_4 = axialer Entnahmestrom
- j_5 = axialer Rückdiffusionsstrom

3. Der axiale Konvektionsstrom ist an der heißen Wand nach oben, an der kalten nach unten gerichtet. Er baut die Konzentrationsschichtung auf: leichte Moleküle werden bevorzugt nach oben, schwere nach unten befördert (für $R_T < 0$ umgekehrt).
4. Der axiale Entnahmestrom überlagert im kontinuierlichen Trennbetrieb sein Gleichstromprofil $v_g(x)$ additiv zum konvektiven Gegenstromprofil $v_k(x)$.
5. Der axiale Rückdiffusionsstrom ist eine weitere Gegenwirkung gegen den axialen Konzentrationsaufbau. Er befolgt das Fick'sche Gesetz und sorgt für die Begrenzung des Konzentrationsanstiegs an den Rohrenden, indem er ein stationäres Konzentrationsgleichgewicht eintreten läßt.

Die Stromdichte des gesuchten Isotops

$$J = \sum_{n=1}^5 j_n$$

erfüllt wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} J + \dot{c} \rho = 0$$

im stationären Fall die Bedingung

$$\operatorname{div} J = 0.$$

Der Isotopenstrom besitzt eine horizontale x -Komponente und eine vertikale z -Komponente:

$$|J| = (j_1 - j_2) + (j_3 + j_4 - j_5).$$

Die Gesamtmasse des gesuchten Isotops, welche pro Zeit durch den Rohrquerschnitt f hindurch längs des Rohres nach oben (oder unten) transportiert wird, ist (mit der Abkürzung $v_k + v_g = v$)

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_z &= \int_f (J_z df) \\
 &= \int_f (j_3 + j_4 - j_5) df \\
 &= \int_f \left\{ c(v_k + v_s) - D \frac{\partial c}{\partial z} \right\} df \\
 &= (2b) \bar{g} \int_{-w}^{+w} c v dx - D \bar{g} f \frac{dc}{dz} .
 \end{aligned}$$

Das vertikale Konzentrationsgefälle

$\frac{dc}{dz}$ ist dabei der Mittelwert von $\frac{\partial c}{\partial z}$ über den Rohrquerschnitt f . Zur Auswertung des Integralausdrucks wird partiell integriert und dabei eine Hilfsfunktion $\Phi(x) = -\int_w^x v(x) dx$ eingeführt. Der Nettodurchsatz durch den Rohrquerschnitt $f = (2b) \cdot (2w)$ ist dann gegeben durch $\Phi(w) = -\frac{f}{(2b) \bar{g}}$. Man erhält damit

$$\bar{J}_z = (2b) \bar{g} \int_{-w}^{+w} \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \Phi(x) dx - (2b) \bar{g} c \cdot \Phi(w) - D \bar{g} f \frac{dc}{dz} .$$

Das horizontale Konzentrationsgefälle

$\frac{\partial c}{\partial x}$ im neuen Integralausdruck erhält man aus der Stationaritätsbedingung

$$\operatorname{div} J = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 :$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = -\frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} (j_3 + j_4 - j_5) = -\rho(v_k + v_s) \frac{\partial c}{\partial z} + D \rho \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} .$$

Vernachlässigt man das Divergenzglied der Rückdiffusion^{*)}, so kann man hieraus J_x durch Integration gewinnen:

$$J_x = -\rho v \frac{\partial c}{\partial z} dx + \text{const} = -\rho \frac{dc}{dz} \int_{-w}^x v dx = \rho \frac{dc}{dz} \cdot \Phi(x) .$$

^{*)} Der Beitrag dieses Gliedes zum Transport wurde von Bardeen[3] zu etwa 1% abgeschätzt.

Andererseits ist

$$\bar{J}_x = j_1 - j_2 = Dg \alpha c c' \frac{1}{T} \text{grad } T - Dg \frac{dc}{dx}.$$

Durch Vergleich ergibt sich der horizontale Konzentrationsverlauf

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{1}{D} \frac{dc}{dz} \cdot \phi(x) + \alpha c c' \frac{1}{T} \frac{dT}{dx},$$

den man dann in das Transportintegral einsetzt.

Der Isotopenstrom längs des Rohres ist demnach

$$\begin{aligned} \bar{J}_z &= cc'(2b) \int_{-w}^{+w} \frac{g\alpha}{T} \frac{dT}{dx} \cdot \phi(x) dx - \frac{dc}{dz} (2b) \int_{-w}^{+w} \frac{g}{D} \cdot \phi^2(x) dx - \\ &\quad - DgF \frac{dc}{dz} - cg(2b) \cdot \phi(w) = \\ &= {}_{2f} Hcc' - K_k \frac{dc}{dz} - K_d \frac{dc}{dz} + sc = \\ &= Hcc' - K \frac{dc}{dz} + sc. \end{aligned}$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung beschreibt als Grundgleichung des Trennrohrs an jeder Stelle $c(z)$ das stationäre Gleichgewicht im Massenstrom der Isotope.

Wir diskutieren ihre wichtigsten Eigenschaften:

Am R o h r e n d e wird der Isotopenstrom $\bar{J}_z$ mit dem Durchsatz $\mathcal{J}$ = Massenentnahme/Zeit = Entnahmestrom und der Endkonzentration c_E entnommen. Der Strom $\mathcal{J}c_E$ = Partialmassenentnahme/Zeit muß dabei ständig durch den stationären Isotopenstrom $\bar{J}_z$ nachgeliefert werden:

$$\bar{J}_z = \mathcal{J}c_E.$$

In der umgeordneten Form

$$\mathcal{J}(c_E - c) = Hcc' - K \frac{dc}{dz} = {}_{2f} \tau \quad (3)$$

erlaubt diese Transportgleichung⁴⁾ eine einfache Deutung:

ΔC_E ist der stationäre Gesamttransport des Rohres. Er stammt nicht aus dem inneren Gegenstrom-Transportprozeß sondern rührt von der äußeren Gleichstrom-Entnahme her.

$\tau = \Delta(C_E - C)$ stellt den Eigentransport des Rohres infolge des Zusammenspiels von Gegenstromkonvektion und Diffusion dar. Er fällt von der Einspeisestelle (C_A) zum Entnahmeende (C_E) hin monoton auf Null ab. Er setzt sich zusammen aus einem positiven Aufbau-Anteil Hcc' und einem negativen Abbau-Anteil $K \frac{dc}{dz}$.

Der Aufbau-Anteil Hcc' stellt den Anfangstransport τ_A des Rohres dar: Weil zu Beginn der Trennung noch kein axialer Konzentrationsgradient vorhanden ist, fließt der volle, durch keinen Rücktransport verminderte Isotopenstrom durch das Rohr zum Entnahmeende. Er stellt damit den maximalen Eigentransport des ganzen Trennvorgangs dar. Der Aufbau-Transportfaktor H gibt direkt die konvektive Verstärkung des elementaren Thermodiffusionseffektes an. Das Massenwirkungsprodukt cc' folgt aus der binären Molekülwechselwirkung.

Der Abbau-Anteil $K \frac{dc}{dz}$ stellt den Rücktransport im Trennrohr dar. Ohne ihn würde der Konzentrationsaufbau unbegrenzt ansteigen. Durch die Gegenwirkung dieser Rückvermischung stellt sich ein dynamischer Gleichgewichtszustand ein. Der Rücktransportfaktor K setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Der erste Term K_k erfaßt die Rückvermischung durch den konvektiven Gasumlauf; der zweite Term K_d berücksichtigt die Rückvermischung durch die Konzentrationsdiffusion.

⁴⁾ Die Transport-Differentialgleichung (3) gilt in gleicher Form für das Hertz'sche Diffusionsverfahren, die Gegenstromzentrifuge usw., so daß eine sehr weitgehende formale Analogie der Gegenstromverfahren untereinander besteht [22].

Zur gleichzeitigen Gewinnung des leichten und des schweren Isotops koppelt man einen Anreicherungsteil („1“) und einen Abreicherungsteil („2“) an der Einspeisestelle (C_A) aneinander. Beide Rohrteile sind im stationären Zustand durch die Massenbilanz der Isotope

$$J_1 C_{E1} + J_2 C_{E2} = (J_1 + J_2) C_A$$

verkettet.

Diese K o n t i n u i t ä t s g l e i c h u n g regelt das Verhältnis von eingestellter Entnahmegeschwindigkeit J und erzielter Entnahmekonzentration C_E :

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{C_{E2} - C_A}{C_{E1} - C_A}.$$

Hieraus folgt für den Eigentransport $\tau = J(C_E - C_A)$ am Einspeisepunkt direkt

$$\tau_1 = \tau_2$$

d.h. es wird insgesamt in jedem der beiden aneinandergekoppelten Teile genausoviel schweres Isotop nach unten befördert, wie leichtes nach oben⁺⁾ .

Zur expliziten Berechnung der hydrodynamischen Transportintegrale H , K ist die Kenntnis des Geschwindigkeitsprofils $v(x)$ der Gasströmung im Trennspalt erforderlich.

⁺⁾ Der eingespeiste binäre Gasstrom kann in einem Arbeitsgang gleichzeitig in eine leichte und eine schwere Fraktion zerlegt werden. Daher beschränken wir die folgenden Betrachtungen auf den oberen "leichten" Anreicherungsteil. Für den unteren "schweren" Abreicherungsteil verläuft dann alles analog.

4. Konvektions- und Entnahmestrom

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils $v(x)$ der Gasströmung, macht man zunächst vereinfachende Annahmen:

1. Das Gas ströme laminar in einem unendlich breiten planparallelen Plattenpaar (statt in einem Zylinderrohr).
2. Die Wärmeleitfähigkeit λ , die Zähigkeit η , der Diffusionskoeffizient D und der Thermodiffusionsfaktor α seien temperaturunabhängig.

Man wählt ein kartesisches Koordinatensystem:

x - Richtung : Spaltweite $2w$

y - Richtung: Spaltbreite $2b$

z - Richtung : Spaltlänge z

Temperatur der heißen Wand T_1

Temperatur der kalten Wand T_a

Temperaturdifferenz $\Delta T = T_1 - T_a$

Die Temperaturverteilung im Trennspace folgt aus der Differentialgleichung der stationären Wärmeleitung

$$(\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad}) T = 0$$

Aus

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

ergibt sich mit den Randbedingungen $T = T_1, T_a$ für $x = \pm w$ ein linearer Temperaturverlauf

$$T(x) = \bar{T} - \Delta T \frac{x}{2w}$$

mit dem Mittelwert

$$\bar{T} = \frac{1}{2} (T_1 + T_a) .$$

Die Geschwindigkeitsverteilung folgt aus der Navier-Stokes-Differentialgleichung

$$(\operatorname{div} \eta \operatorname{grad}) v = \operatorname{grad} p + g g .$$

Sie vereinfacht sich zu

$$\eta \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\partial \rho}{\partial z} + g \rho.$$

Nochmalige Differentiation nach x ergibt

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = g \frac{\partial \rho}{\partial x} = g \frac{\partial \rho}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dx} = - \frac{\rho}{T} \frac{\Delta T}{(2w)}.$$

Bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$v = 0 \quad \text{für } x = \pm w$$

und der Bedingung

$$s = (2b) \bar{\rho} \int_{-w}^{+w} v(x) dx$$

für den Durchsatz durch den Plattenspalt, folgt dann durch elementare Integration für das Geschwindigkeitsprofil

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{g \bar{\rho}}{12 \eta} \frac{\Delta T}{T} \frac{x}{w} (w^2 - x^2) + s \frac{6}{(2w)^3 (2b)} (w^2 - x^2) = \\ &=_{2f} v_k(x) + v_g(x). \end{aligned}$$

Im kontinuierlichen Trennprozeß überlagern sich also die Gegenströmung $v_k(x) \sim x(w^2 - x^2)$ (kubisches Parabelprofil) und die Gleichströmung $v_g(x) \sim (w^2 - x^2)$ (quadratisches Parabelprofil) additiv. Beide Strömungen sind in Abb. 1 dargestellt.

5. Transportfaktoren

Das Strömungsprofil $v(x)$ bestimmt die Transportfaktoren H, K_k, K_d über die Hilfsfunktion $\phi(x) = -\int_{-w}^x v(x) dx$ nach Kap. 3:

$$H =_{\text{def}} (2b) \int_{-w}^{+w} \frac{\bar{\rho} \alpha}{T} \frac{dT}{dx} \cdot \phi(x) dx$$

$$K_k =_{\text{def}} (2b) \int_{-w}^{+w} \frac{\bar{\rho}}{D} \cdot \phi^2(x) dx$$

$$K_d =_{\text{def}} (2b) (2w) D \bar{\rho}.$$

Die Transportfaktoren hängen ab von den hydrodynamischen, thermischen und geometrischen Gegebenheiten der Gasströmung:

Konvektionsstrom v_k

Entnahmestrom v_s

Temperaturen T_1, T_a

Gasdichte ρ

Zähigkeit η

Selbstdiffusionskoeffizient D

Thermodiffusionsfaktor α

Spaltweite $2w$

Spaltbreite $2b$.

Sofern die beiden gemischten Isotope nahezu gleiches Molekulargewicht haben, sind die gaskinetischen Größen α, ρ, η, D praktisch unabhängig von der Konzentration c . Somit hängen auch die Transportfaktoren weder explizit noch implizit von c ab [36].

Für das Modell eines unendlich breiten planparallelen Plattenpaares ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsprofil $v(x) = v_k(x) + v_s(x)$ durch elementare Integrationen die Hilfsfunktion $\phi(x)$ und daraus die Transportfaktoren [2]:

$$H = H^0 \left\{ 1 - \frac{1}{H^0} \frac{1}{2} \alpha \frac{\Delta T}{T} \right\} \quad \text{mit}$$

$$H^0 =_{\text{def}} (2w)^3 (2b) \left[\frac{\bar{\rho}^2 \alpha g}{6! \eta} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right],$$

$$K_k = K_k^0 \left\{ 1 - \frac{1}{H^0} \frac{7}{2} \alpha \frac{\Delta T}{T} + \left(\frac{1}{H^0} \right)^2 \frac{13}{50} \left(\alpha \frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right\} \quad \text{mit}$$

$$K_k^0 =_{\text{def}} (2w)^7 (2b) \left[\frac{\bar{\rho}^3 g^2}{9! \eta^2 D} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right].$$

Die Verhältnisse vereinfachen sich wesentlich, wenn man mit nicht zu großen Entnahmen s arbeitet: Sofern nämlich $v_3 \ll v_k$ gilt, gehen die geschweiften Klammerausdrücke gegen 1. Die Transportfaktoren H , K_k sind dann praktisch unabhängig von der Entnahme s .

Im Rahmen dieser Näherung kann man das kubisch-parabolische Gegenstromprofil $v_k(x)$ auch durch ein gemitteltes Stufenprofil

$$\bar{v}_k = \frac{1}{w} \int_0^w v_k(x) dx = (2w)^2 \left[\frac{\bar{p} g}{192 \eta} \frac{\Delta T}{T} \right]$$

ersetzen. Man erhält damit [50]

$$\begin{aligned} H &= \bar{v}_k (2w)(2b) \left[\frac{\bar{p} \alpha}{2^2} \frac{\Delta T}{T} \right] = (2w)^3 (2b) \left[\frac{\bar{p}^2 \alpha g}{3 \cdot 2^8 \eta} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right] \\ K_k &= \bar{v}_k (2w)^3 (2b) \left[\frac{\bar{p}}{2^3 D} \right] = (2w)^7 (2b) \left[\frac{\bar{p}^3 g^2}{3^2 \cdot 2^{15} \eta^2 D} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right] \\ K_d &= (2w)(2b) \left[D \bar{p} \right]. \end{aligned}$$

Dadurch läßt sich die funktionale Abhängigkeit der Transportfaktoren übersichtlich separieren in einen geometrischen Anteil (der von der Rohrkonstruktion abhängt) und einen gaskinetischen Anteil (der vom Trenngas bestimmt wird):

$$H = (2w)^3 (2b) \cdot h \quad (4)$$

$$K_k = (2w)^7 (2b) \cdot k_k \quad (5)$$

$$K_d = (2w)(2b) \cdot k_d \quad (6)$$

Der geometrische Anteil der Transportfaktoren tritt in einfachen Potenzen der Trennspaltweite $2w$ und der Plattenbreite $2b$ auf. Der gaskinetische Anteil ist in den Faktoren h , k_k , k_d zusammengefaßt. Man operiert dabei mit Mittelwerten von p, η, D, α bei einer mittleren Temperatur $\bar{T}$, weil die genaue T-Abhängigkeit dieser gaskinetischen Größen vom jeweiligen Molekülmodell abhängt.

6. Formfaktoren

Eine realistische Trennrohranordnung verlangt die Preisgabe der speziellen Voraussetzung eines unendlich breiten bzw. eines seitlich randlosen planparallelen Plattenpaares.

Der allgemeine Fall ist ein koaxiales Zylinderrohr (Rohrquerschnitt: zwei konzentrische Kreise). Er enthält als Grenzfälle das unendlich breite Plattenpaar und das extrem zylindrische Drahtrohr.

Die unterschiedliche geometrische Formgebung läßt sich in übersichtlicher Weise durch zusätzliche geometrische Formfaktoren φ, ψ, χ berücksichtigen, die an die Planplatten-Transportfaktoren H, K_k, K_d heranmultipliziert werden.

Als erste Verallgemeinerung des unendlich breiten Plattenpaares betrachten wir ein endlich breites Plattenrohr mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 2).

R e c h t e c k r o h r:

Zur Berechnung der mittleren Konvektionsgeschwindigkeit hat man die Navier-Stokes-Differentialgleichung über eine rechteckige Berandung zu lösen. Das hydrodynamische Randwertproblem

$$\eta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = - \frac{x}{2w} \left[\bar{\rho} g \frac{\Delta T}{T} \right]$$

mit $v=0$ für $x = \pm w, y = \pm b$

ergibt dann ein Geschwindigkeitsprofil $v(x, y)$, das von x und y abhängig ist (Abb. 2). Es hat den Mittelwert

$$\bar{v}_k = \frac{1}{wb} \int_0^w \int_0^b v(x, y) dx dy = (2w)^2 \left[\frac{\bar{\rho} g}{192 \eta} \frac{\Delta T}{T} \right] \cdot \nu,$$

$$\text{mit } \nu = \frac{3 \cdot 2^{12}}{\pi^6} \sum_{\substack{n=1,3,5,\dots \\ m=2,6,10,\dots}} \frac{1}{m^2 n^2 [m^2 + n^2 (\frac{2w}{2b})^2]}.$$

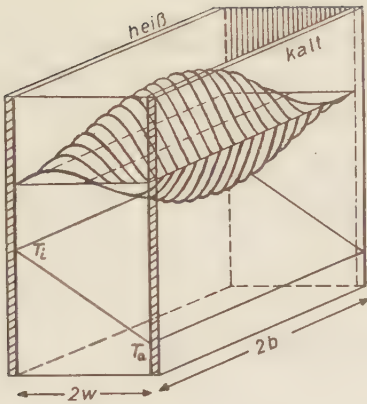


Abb. 2 : Temperaturverlauf und Strömungsprofil im Rechteckrohr

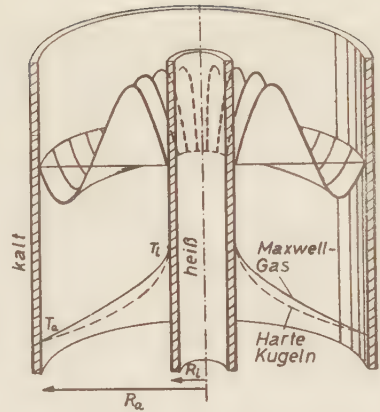


Abb. 3 : Temperaturverlauf und Strömungsprofil im Zylinderrohr

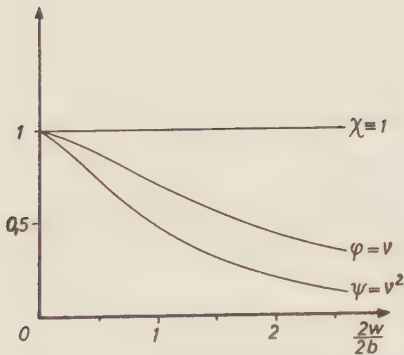


Abb. 4 : Die Formfaktoren φ, ψ, χ der Transportfaktoren H, K_k, K_d zur Umrechnung vom unendlich breiten Plattenpaar auf das endlich breite Rechteckrohr in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis $2w/2b$. Berechnet für temperaturunabhängiges λ .

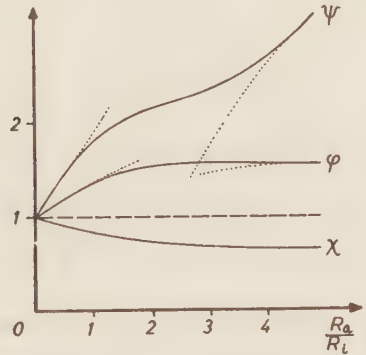


Abb. 5 : Die Formfaktoren φ, ψ, χ der Transportfaktoren H, K_k, K_d zur Umrechnung vom unendlich breiten Plattenpaar auf das Zylinderrohr in Abhängigkeit vom Radienverhältnis R_a/R_i . Berechnet nach Jones und Furry [50] für ein Maxwell-Gas mit $T_i/T_a = 3$.

Zur Berechnung der Transportfaktoren benötigt man diese mittlere Konvektionsgeschwindigkeit $\bar{v}_k$. Sie stimmt bis auf den Faktor ν mit der Rechnung für das seitlich unbegrenzte Planplattenpaar überein.

Wegen des Zusammenhangs $H \sim \bar{v}_k$, $K_k \sim \bar{v}_k^2$, $K_d \sim \bar{v}_k^0$ sind dann die Formfaktoren des Rechteckrohres gegeben durch $\varphi = \nu$, $\psi = \nu^2$, $\chi = 1$. Beim Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ erhält man wieder die Lösung des Planplattenpaares $\varphi = 1$, $\psi = 1$, $\chi = 1$.

Die Formfaktoren des Rechteckrohres sind in Abb. 4 als Funktion des Seitenverhältnisses $\frac{2w}{2b}$ graphisch dargestellt.

Z y l i n d e r r o h r:

Der allgemeine Fall des coaxialen Zylinderrohres wurde von Waldmann und Jensen [49] (1941) und von Fleischmann und Jensen [37] (1942) behandelt. Sie beschränkten sich auf die Annahme temperaturunabhängiger Gaskoeffizienten ($\lambda, \eta, D, \alpha = \text{const}$).

Furry und Jones [41] (1946) erweiterten die Rechnung auf die einfachen Temperaturabhängigkeiten des Maxwell-Gases ($\lambda \sim T$, $\eta \sim T$, $D \sim T^2$, $\alpha = \text{const}$).

Raman und Saxena [65] (1962) und Reinhold [67] (1963) führten ähnliche Rechnungen auch für die Temperaturabhängigkeit eines Modellgases aus starren Kugeln durch ($\lambda \sim \sqrt{T}$, $\eta \sim \sqrt{T}$, $D \sim T$, $\alpha = \text{const}$).

McInteer und Reisfeld [56] (1961) legten ihren Rechnungen das Lennard-Jones (12-6)-Potential zugrunde, um eine noch bessere Anpassung an das reale Gas zu erzielen.

Zur exakten Berechnung hat man die Wärmeleitungsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichung über einem Kreisring mit den Radien R_a, R_i und den Temperaturen T_a, T_i zu lösen:

Bei temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit λ ergibt sich ein logarithmischer Temperaturverlauf vom heißen Innenrohr (R_i, T_i) zum kalten Außenrohr (R_a, T_a)

$$T(r) = T_a + \Delta T \frac{\ln \frac{R_a}{r}}{\ln \frac{R_a}{R_i}}.$$

Die Wärmeleitfähigkeit λ ist aber meist eine Temperaturfunktion. Für die verschiedenen Molekülmodelle ergeben sich daher Abweichungen vom logarithmischen Temperaturverlauf (Abb. 3). Dadurch wird auch der wichtige logarithmische Mittelwert [14] ^{*)}

$$\bar{T} = T_a + \Delta T \left(\frac{1}{2 \ln \frac{R_a}{R_i}} - \frac{1}{\left(\frac{R_a}{R_i} \right)^2 - 1} \right)$$

der die Mittelwerte der Gaskoeffizienten $\lambda, \eta, D, \alpha, \rho$ bestimmt, verändert.

Die radiale Temperaturverteilung bestimmt den radialen Dichteverlauf und damit das Geschwindigkeitsprofil v der konvektionsströmung.

Hieraus lassen sich die zylindrischen Transportfaktoren berechnen. Sie sind denen des Planplattenpaares mit temperaturunabhängigem λ, η, D, α sehr ähnlich:

Es treten dieselben geometrischen Potenzabhängigkeiten auf, wenn man für die Trennspaltweite $2w = R_a - R_i$ (Wandabstand) und für die Plattenbreite $2b = 2\pi \frac{R_a + R_i}{2}$ (mittlerer Rohrumfang) einsetzt. Auch die gaskinetischen Abhängigkeiten bleiben dieselben. Das unterschiedliche Profil der Konvektionsströmung äußert sich im Auftreten zusätzlicher Formfaktoren φ, ψ, χ . Sie sind dimensionslos und werden an die Planplatten-Transportfaktoren H, K_k, K_d zusätzlich heranmultipliziert. Sie hängen nur vom Radienverhältnis R_a/R_i und vom Temperaturverhältnis T_i/T_a ab. Ihre explizite numerische Berechnung für die jeweiligen Molekülmodelle erfordert erheblichen Rechenaufwand (sie sind in [56][65][68][67] als Funktionen von R_a/R_i und T_i/T_a tabelliert).

Abb. 5 zeigt Formfaktoren für ein Maxwell-Gas als Funktion des Radienverhältnisses mit $T_i/T_a = 3$ nach [50] vom planparallelen Grenzfall (bei dem φ, ψ, χ definitionsgemäß gleich 1 sind) bis zum extrem zylindrischen Grenzfall des Drahtrohres.

^{*)} Dieser Mittelwert der Temperatur liegt etwa in der Gegend des Wendepunktes der Strömung [17].

7. Lösungen der Transportgleichung

Die experimentelle Arbeit an einer Trennanlage kann man in drei Phasen gliedern:

1. In der ersten Arbeitsphase läßt man das Rohr anlaufen und ohne Entnahme trennen. Der Anfangstransport baut dabei vom Rohrende her eine zeitlich anwachsende Konzentrations-schichtung auf. Diese bleibt nach einer gewissen Anlaufzeit schließlich räumlich und zeitlich konstant.
2. In der Phase konstanter Endeinstellung besteht ein stationäres dynamisches Gleichgewicht zwischen dem Anfangstransport und dem Rücktransport. Im entnahmefreien Betrieb stellt sich der größtmögliche Konzentrationsunterschied ein. Aus ihm kann man die charakteristischen Kenngrößen der Anlage und damit ihr ordnungsgemäßes Arbeiten feststellen.
3. In der letzten Phase schaltet man die Entnahmepumpen ein. Für jeden eingestellten Entnahmestrom s ergibt sich (nach einer gewissen Relaxationszeit) eine bestimmte Gleichgewichts-Endkonzentration $c_E(s)$. Die Quantität (s) und die Qualität (c_E) des Trennprodukts ändern sich dabei gegenläufig. Für den stationären Dauerbetrieb wird man daher auf einen zweckmäßigen Kompromiß abzielen.

Die theoretische Behandlung erfordert die Lösung der Transportgleichung (3) unter Einbeziehung der Kontinuitätsgleichung. Aus diesen beiden Aussagen [53]

$$Hcc' - K \frac{\partial c}{\partial z} = \tau$$

$$\mu \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

($\mu = \frac{\text{Isotopenmasse}}{\text{Rohrlänge}}$) folgt dann die allgemeine Transportgleichung in zeitabhängiger Form:

$$\frac{\partial}{\partial z} (Hcc' - K \frac{\partial c}{\partial z}) = -\mu \frac{\partial c}{\partial t} . \quad (7)$$

Aus dem Lösungsvorrat dieser partiellen nichtlinearen Differentialgleichung 2.Ordnung suchen wir Lösungen, welche die drei Arbeitsphasen in der obigen Reihenfolge beschreiben:

1. Der entnahmefreie Anlaufvorgang

wurde von Waldmann [79] (1939), Debye [18] (1939) und Bardeen [3] (1940) für Sonderfälle, von Majumdar [54] (1951) in allgemeiner Form behandelt.

Die analytische Lösung unter den verschiedenen möglichen Randbedingungen ist ziemlich verwickelt.

Eine einfache Überlegung von Clusius und Dickel [10] läßt aber das physikalisch Wesentliche erkennen:

Um die Anlaufzeit abzuschätzen ermittelt man die Menge an Reinisotop, die im Trennrohr zur Herstellung der gewünschten stationären Konzentrationsschichtung nötig ist. Man dividiert sie durch den Anfangstransport, der an der Stelle c_A ins Trennrohr hineinfließt. Hieraus ergibt sich eine charakteristische Zeit, die größenordnungsmäßig gleich der Anlaufzeit ist. Die Abweichung von der exakten Lösung beruht darauf, daß der Aufbautransport nicht während der ganzen Anlaufphase konstant bleibt. Er sinkt vom Maximalwert des Anfangstransportes $\tau_A = H_A c_A c'_A$ wegen des allmählich einsetzenden Rücktransports $K \frac{dc}{dz}$ allmählich auf $\tau = 0$ ab. In erster Näherung ist daher

$$\begin{aligned} t_0 &\approx \frac{\bar{f} \int_0^z f(c - c_A) dz}{H_A c_A c'_A} = \frac{\bar{f}}{H_A c_A c'_A} \int f \cdot \frac{c - c_A}{\frac{dc}{dz}} dc = \\ &= \frac{\bar{f}}{H_A c_A c'_A} \int_{c_A}^{c_E} f \cdot \frac{K}{H} \frac{c - c_A}{c c'} dc \end{aligned} \quad (8)$$

Die Einstellzeit hängt also davon ab, ob und wie man den Rohrquerschnitt f und damit die Transportfaktoren H , K entlang der Rohrlänge z variabel gestaltet.

Für den praktisch wichtigen Sonderfall des konstanten Rohrquerschnitts sind die Transportfaktoren H , K konstant. Die Anlaufzeit ist dann wesentlich durch das Integral $\int_{c_A}^{c_E} \frac{c - c_A}{c c'} dc$ bestimmt. Es ist als Funktion der Anfangs- und Endkonzentration in Abb. 15 graphisch dargestellt.

Solange c noch nicht sehr von c_A verschieden ist, gilt $\int_{c_A}^c \frac{c - c_A}{cc'} dc \approx \frac{(c - c_A)^2}{c_A c_A}$ d.h. für die anfängliche Konzentrationsverschiebung gilt $t \sim (c - c_A)^2$. Am Anfang wächst die Anreicherung also näherungsweise nach einem Wurzelgesetz $\Delta c \sim \sqrt{t}$ (Debye), nähert sich dann aber asymptotisch exponentiell $\sim (1 - e^{-t/t_0})$ (Waldmann) der EndEinstellung. Dieser zeitliche Verlauf ist qualitativ in Abb. 7 dargestellt.

2. Die e n t n a h m e f r e i e T r e n n u n g im erreichten Gleichgewichtszustand läßt sich aus Gleichung (3) exakt berechnen:

Sie vereinfacht sich auf

$Hcc' - K \frac{dc}{dz} = 0$ und läßt sich direkt integrieren. Mit den Randbedingungen $c = c_A$, c_E für $z = 0$, Z folgt

$$\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'} = \ln \frac{c_E c_A'}{c_A' c_A} = \int_0^Z \frac{H}{K} dz \quad (9)$$

Der logarithmische Trennfaktor, die "Trennschärfe", hängt also von der Rohrlänge Z und der Größe der Transportfaktoren H , K längs der z -Koordinate ab. Für den praktisch wichtigen Sonderfall des konstanten Rohrquerschnitts sind H, K konstant. Die Trennschärfe ist dann $\ln \frac{c_E c_A'}{c_A' c_A} = Z \frac{H}{K}$. Der Quotient $\frac{K}{H}$ hat also die Bedeutung einer Relaxationslänge, längs deren sich das Konzentrationsverhältnis um das e -fache verschiebt. Man sieht daraus, daß durch ein genügend langes Trennrohr prinzipiell eine vollkommene Trennung ($c_E = 1$) beliebig gut angenähert werden kann.

Das Integral $\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'} \equiv \ln \frac{c_E c_A'}{c_A' c_A}$ ist als Funktion der Anfangs- und Endkonzentration in Abb. 13 graphisch dargestellt.

3. Im k o n t i n u i e r l i c h e n E n t n a h m e b e - t r i e b beschreibt die stationäre Transportgleichung (3)

$$s(c_E - c) = Hcc' - K \frac{dc}{dz}$$

die Abhängigkeit der erzielten Entnahmekonzentration c_E von der Ausgangskonzentration c_A , vom Entnahmestrom s ,

von der Rohrlänge Z und den Transportfaktoren H, K . Zu ihrer Integration ist die Kenntnis der z -Abhängigkeit von H, K erforderlich. Auch wenn man noch offen läßt, ob oder wie man den Rohrquerschnitt und damit die Transportfaktoren H, K entlang der Rohrlänge Z variabel gestaltet, kann man doch allgemeine qualitative Aussagen machen über den funktionalen Zusammenhang $c_E(s)$:

- a. Im Sonderfall $s = 0$ erhält man wieder den entnahmefreien Fall von Punkt 2.
- b. Bei konstanter Entnahme s und konstanter Rohrlänge Z bleibt die Trennschärfe in guter Näherung unabhängig von der Anfangskonzentration c_A konstant.
- c. Bei konstanter Entnahme s und wachsender Rohrlänge Z nimmt die Trennschärfe monoton zu.
- d. Bei wachsender Entnahme s und konstanter Rohrlänge Z nimmt die Trennschärfe monoton ab.

Die letzte Aussage bedeutet, daß bei genügend großer Entnahme s die Endkonzentration c_E gegen die Ausgangskonzentration c_A konvergiert. Dann besteht aber im Rohr kein Konzentrationsgradient $\frac{dc}{dz}$ mehr. Also ist auch kein Rücktransport vorhanden. Dann hat der Eigentransport τ seinen größtmöglichen Wert, nämlich den Anfangstransport τ_A . Dieses typische Verhalten

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c_E = c_A$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tau = \tau_A$$

ist in den Abbildungen 8, 10 qualitativ dargestellt. Es gilt für beliebige Rohrform.

4. Der praktisch wichtige Fall k o n s t a n t e n R o h r - q u e r s c h n i t t s wurde von Waldmann [79] behandelt: Mit konstantem H, K ergibt die Integration über die Rohrlänge mit den Randbedingungen $c = c_A, c_E$ für $z = 0, Z$ die

Lösung

$$Z \frac{H}{K} = \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' - \frac{s}{H}(c_E - c)} \equiv \frac{1}{2B} \ln \frac{(c_E - D + B)(c_A - D - B)}{(c_E - D + B)(c_A - D + B)}$$

$$\text{mit } B = \sqrt{D^2 - \frac{s}{H} c_E} \quad (10)$$

$$D = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{H} \right).$$

Diese Funktion enthält den Zusammenhang zwischen vorgesehener Entnahme s , gewünschter Endkonzentration c_E und erforderlicher Rohrlänge Z in impliziter Form.

Sie hat folgende Eigenschaften:

a. Im Grenzfall $s = 0$ (entnahmefreie Trennung) ergibt sich wieder die Lösung $Z \frac{H}{K} = \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'} \equiv \ln \frac{c_E c_A'}{c_E' c_A}$ von Punkt 2. Die Rohrlänge Z wird minimal.

b. Im Grenzfall $s = \frac{H c_A c_A'}{c_E - c_A}$ ist die höchstmögliche Entnahme $s_{\max}$ bei vorgegebenem c_E , c_A , H für Rohre mit konstantem Querschnitt erreicht. Wegen des unendlichen Anwachsens der Rohrlänge ($Z \rightarrow \infty$) darf man den Grenzwert $s_{\max}$ nicht überschreiten, ohne die Endanreicherung c_E zu verringern.

c. Die Trennaufgabe c_A , c_E , s ist nicht nur durch eine einzige Rohrkonstruktion lösbar. Es ergibt sich eine unendliche Mannigfaltigkeit von Rohren mit konstantem Querschnitt, die das Trennproblem lösen. Sie unterscheiden sich durch ihre H, K, Z -Werte.

Das Integral $\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' - s(c_E - c)/H}$ ist als Funktion der Anfangs- und Endkonzentration für einige Werte des dimensionslosen Parameters s/H in Abb. 6 graphisch dargestellt.

Die Bedingung für die obere Grenze der Entnahme $s_{\max}$ folgt aus der Transportgleichung (3), wenn man mit verschwindendem Konzentrationsanstieg ($\frac{dc}{dz} \rightarrow 0$) im Rohr arbeitet:

Dann ist $\tau = \tau_A$ also $s_{\max}(c_E - c_A) = H c_A c_A'$; man muß sich auf Entnahmen $s \leq s_{\max}$ beschränken.

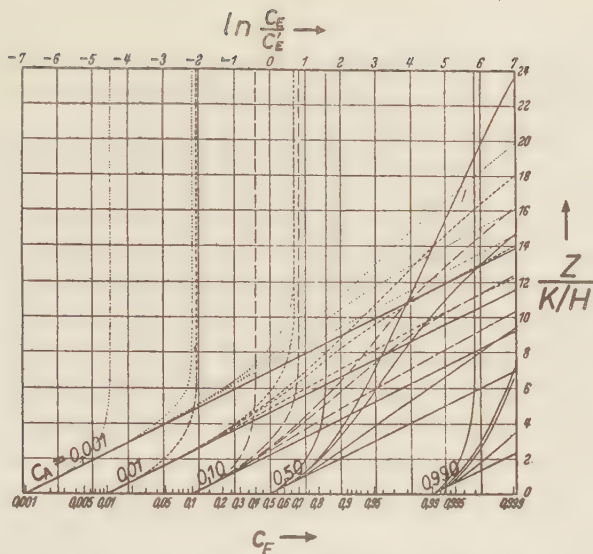


Abb.6 : Die Rohrlänge $\frac{Z}{K/H}$ (dimensionslos normiert) für Trennrohre mit konstantem Querschnitt in Abhängigkeit von der Endkonzentration c_E . Parameter sind die Anfangskonzentration c_A und die normierte Entnahme s/H . (Nach Fleischmann und Jensen [37]).

Dargestellt ist das Integral $\frac{Z}{K/H} = \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{c c' - s(c_E - c)/H}$ als Funktion der (logarithmischen) Endkonzentration c_E mit folgenden Parameterwerten :

c_A	0,001	0,01	0,1	0,5	0,99
s/H	0	0	0	0	0
	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-1}$	0,25	0,495
	$0,9 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-2}$	$0,9 \cdot 10^{-1}$	0,45	0,891
	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	0,50	0,990
	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	0,75	1,485
	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	-	-
	$1,0 \cdot 10^{-1}$	-	-	-	-

Im Grenzfall entnahmefreier Trennung ($s/H = 0$) ergibt sich in der logarithmischen Darstellung eine Geradenschar gleicher Steigung.

Im Grenzfall $s/H = c_A c'_A / (c_E - c_A)$ ist die höchstmögliche Entnahme $s_{\max}$ (bei festem c_A, c_E) erreicht. Die erforderliche Rohrlänge wird dann unendlich.

Die "Ergiebigkeit" der Isotopenquellen bezüglich Produktion s und Anreicherung c_E hat also bei konstantem Rohrquerschnitt selbst für beliebige Rohrlänge Z eine prinzipielle Grenze.

Die höchstzulässige Entnahme $s_{\max}$ läßt sich bei gegebenem c_A, c_E nur durch Vergrößerung von H (d.h. Zunahme des mittleren Rohrumfangs $2b$ oder der Trennspaltweite $2w$) weiter steigern. Bei Zunahme des mittleren (längs z konstanten) Rohrumfangs $2b$ wird aber der erforderliche Energieaufwand stark erhöht. Man wird so auf das Problem geführt, aus der unendlichen Anzahl von Lösungsmöglichkeiten die jeweils optimalen herauszufinden.^{*)}

Läßt man insbesondere die Einschränkung konstanten Rohrquerschnitts ($H(z) = \text{const}$) fallen, so erhält man durch die Variable $H(z)$ z w e i zusätzliche geometrische Freiheitsgrade ($2b, 2w$). Man kann sie nicht nur zur Steigerung der Ergiebigkeit der Isotopenquelle sondern auch zur Optimierung ihrer Leistungsfähigkeit heranziehen. Man gelangt dann von den Zylinderrohren mit konstantem Querschnitt auf konisch-pyramidenförmig erweiterte Rohrformen. Sie ermöglichen eine optimale Transportführung bei der Entmischung der Isotope im Trennrohr.

^{*)} Näheres siehe Kap.26, Kap.27

II. THERMODYNAMISCHE OPTIMIERUNG

8. Thermodynamisches Trennpotential

Das Idealmodell einer Trennanlage ist eine semipermeable Wand, durch die man ohne nennenswerten Energieaufwand jedes gewünschte Isotop von seiner Begleitkomponente rein ($c_E = 1$) und in beliebiger Menge ($s \rightarrow \infty$) abtrennen kann.

Die Versuche, eine solche Trennwand auch nur annähernd physikalisch zu realisieren, stoßen auf größte Schwierigkeiten. Oft ist man zudem gar nicht gleichzeitig an der Qualität (c_E) und Quantität (s) des Trennprodukts interessiert. In vielen Anwendungsfällen genügen schon kleine Mengen hochreiner Isotope ($c_E \rightarrow 1, s \rightarrow 0$) oder große Mengen mäßig angereicherter Isotope ($c_E \ll 1, s \rightarrow \infty$).

Um die Wirksamkeit aller Trennanlagen bezüglich Qualität und Quantität der Trennung zu messen, untersucht man das Verhältnis des erzielten Trennerfolgs zum geleisteten Aufwand. Hierzu bildet man aus den thermodynamischen Funktionen der binären Isotopen Gasmischung folgende Begriffe:

Das **Trennpotential** [29] mißt als Qualitätsgröße⁺) den Grad der erzielten Entmischung.

Die **Trennleistung** [47] verknüpft als Quantitätsgröße⁺) die erzielte Entmischung mit der gewonnenen Menge. Der **Wirksamkeitsgrad** [47] mißt das Verhältnis der Trennleistung zum erforderlichen Energieverbrauch (Wärmestrom).

Durch diese Größen wird die Leistungsfähigkeit von Isotopentrennanlagen thermodynamisch quantitativ faßbar. Man kann sie dadurch nach verschiedenen Gesichtspunkten optimieren.

Zur Bestimmung des Trennpotentials betrachtet man eine Isotopentrennanlage als isotherm-isobares System⁺⁺⁾.

⁺) Vgl. Becker, R. [6] S.53

⁺⁺⁾ Längs des Trennrohrs herrscht in z-Richtung an jeder Stelle $c(z)$ gleiche mittlere Temperatur T und gleicher mittlerer Gesamtdruck p .

Sein Zustand wird durch das Gibbs'sche Potential $G = U - TS + pV$ gekennzeichnet.

Bei Zustandsänderungen jeder Einzelkomponente der idealen Gas-mischung ($p_c =$ Partialdruck, $dT = 0$, $dU = TdS - p_c dV$) gilt dann für die molare freie Enthalpie g die Differentialform

$$dg = v dp_c = RT \frac{dp_c}{p_c}.$$

Die Potentialdifferenz zwischen dem Anfangszustand c_A und dem Entmischungszustand c_E ist dann

$$g(c_E) - g(c_A) = RT \ln \frac{p_{c_E}}{p_{c_A}} = RT \ln \frac{c_E}{c_A}.$$

Für die Begleitkomponente c' gilt entsprechend

$$g(c'_E) - g(c'_A) = RT \ln \frac{c'_E}{c'_A}.$$

Die Differenz der partiellen molaren freien Enthalpien g beider Komponenten ($\equiv$ chemisches Potential μ) zwischen Anfangszustand (c_A, c'_A) und Endzustand (c_E, c'_E) ist demnach

$$\mu_E - \mu_A = RT \left[\ln \frac{c_E}{c_A} - \ln \frac{c'_E}{c'_A} \right] = RT \ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A} \equiv RT \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{c c'}.$$

Dieses Trennpotential $\Delta\mu$ der beiden Komponenten zwischen Einspeis- und Entnahmeende der Isotopentrennanlage ist (bis auf den konstanten Faktor RT) gleich der Trennschärfe (9) $\ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A} \equiv \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{c c'}$ zwischen diesen Zuständen. Damit hat das thermodynamische Trennpotential als logarithmisches relatives Konzentrationsverhältnis eine unmittelbare apparative Bedeutung.

Das Integral $\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{c c'}$ ist als Funktion der Anfangs- und Endkonzentration des gewünschten Isotops in Abb. 13 graphisch dargestellt.

9. Maximum des Trennpotentials

Wir untersuchen die Bedingungen für das Maximum des Trennpotentials (Trennschärfe)

$$\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'} \equiv \ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A}$$

in einem Trennrohr.

Hierzu macht man für jedes differentielle Rohrstück dz , in dem die Konzentration c um den Betrag dc zunimmt, den Beitrag zur Trennschärfe $\frac{dc}{cc'}$ maximal⁺⁾ .

Aus der Transportgleichung (3) erhält man durch Umordnung für die differentielle Trennschärfe den Ausdruck

$$\frac{dc}{cc'} = dz \frac{H}{K} \left[1 - \frac{s(c_E - c)}{Hcc'} \right].$$

Die darin auftretenden Transportfaktoren H, K sind durch die hydrodynamischen, geometrischen und thermischen Betriebsbedingungen in den Gleichungen (4)(5)(6) festgelegt.

⁺⁾ Das Variationsproblem, eine Funktion $y(x)$ zu ermitteln, die ein Integral mit festen Grenzen

$$\int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Extremum}$$

zu einem Extremum macht, wird durch die Euler'sche Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$$

gelöst. Wenn dabei die gegebene Grundfunktion F nicht von der Ableitung y' abhängt, vereinfacht sich die Extremalbedingung für y auf

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Das bedeutet, daß die Forderung "Integral = extremal" reduziert wird auf die Forderung "Integrand = überall extremal". Dieser Fall liegt bei den folgenden Fragestellungen vor.

Bei der Optimierung sind daher insgesamt folgende apparative Parameter zu variieren:

- | | |
|------------------------|------------|
| 1. Entnahme | s |
| 2. Trenndruck | p |
| 3. Spaltweite | $2w$ |
| 4. Spaltbreite | $2b$ |
| 5. Rohrlänge | z |
| 6. Schwerefeld | g |
| 7. Temperaturdifferenz | ΔT |

Wir behandeln sie in dieser Reihenfolge:

1. Für die Entnahme s folgt ein Maximum der Trennschärfe, wenn man entnahmefrei arbeitet:

$$s_{\max} = 0.$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon in Kap.7, Punkt 3d qualitativ erhalten. Der theoretische Verlauf der differentiellen Trennschärfe $\frac{dc}{cc}$ als Funktion der Entnahme s ist ähnlich wie in Abb. 8.

Bei der Optimierung der Trennschärfe brauchen wir daher im Folgenden nur noch das Verhältnis H/K als Funktion der vorgegebenden Auslegungsparameter zu variieren.

2. Der optimale Trenndruck p folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{H}{K_k + K_d} \right) = 0.$$

Von den gaskinetischen Größen sind nur g, D druckabhängig. Die Transportfaktoren haben daher folgende Druckabhängigkeit:

$$\begin{aligned} H &\sim g^2 \sim p^2 \\ K_k &\sim \frac{g^3}{D} \sim p^4 \\ K_d &\sim gD \sim p^0. \end{aligned}$$

Die Variation $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{ap^2}{p^4 + b} \right) = 0$ liefert das Optimum $p^* = b$ und damit $K_k = K_d$.

Aus dieser Optimalbedingung

$$\frac{K_k}{K_d} = 1$$

erhält man als optimalen Trenndruck [79]

$$p_{opt} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{7}{2}} \sqrt{2}}{(2w)^3} \left[\frac{D\eta}{g} \frac{R}{M} \frac{\bar{T}^2}{\Delta T} \right].$$

In Abb. 11 ist die Trennschärfe als Funktion des Trenndruckes p dargestellt.

3. Die optimale Spaltweite $2w$ folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial (2w)} \left(\frac{H}{K_k + K_d} \right) = 0$$

Die Transportfaktoren haben die Potenzabhängigkeiten

$$H \sim (2w)^3$$

$$K_k \sim (2w)^7$$

$$K_d \sim (2w)^4.$$

Die Variation $\frac{\partial}{\partial (2w)} \left(\frac{a(2w)^3}{(2w)^7 + b(2w)} \right) = 0$ liefert das Optimum $2 \cdot (2w)^7 = b \cdot (2w)$ und damit $2K_k = K_d$. Aus dieser Optimalbedingung

$$\frac{K_k}{K_d} = \frac{1}{2}$$

erhält man den optimalen Spaltabstand [37]

$$(2w)_{opt} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^{\frac{7}{2}} \frac{D\eta}{g\vartheta} \frac{\bar{T}}{\Delta T}}. \quad (11)$$

In Abb. 9 ist die Trennschärfe als Funktion der Trennsplattweite $2w$ dargestellt.

4. Für die Spaltbreite $2b$ des planparallelen Plattenpaars existiert infolge der linearen Abhängigkeit

$$H \sim (2b)$$

$$K_k \sim (2b)$$

$$K_d \sim (2b)$$

kein Optimum für die Trennschärfe.

5. Für die Rohrlänge Z existiert ebenfalls kein

Optimum:

Aus $\frac{dc}{CC'} = dz \frac{H}{K}$ folgt eine direkte Proportionalität der Trennschärfe $\int_a^c \frac{dc}{CC'} = Z \frac{H}{K}$ zur Rohrlänge Z . Durch entsprechend lange Rohre kann man also eine beliebig hohe Trennschärfe herstellen und selbst Isotope mit kleinsten Anfangskonzentrationen ($C_A \rightarrow 0$) nahezu rein darstellen ($C_E \rightarrow 1$).

6. Für das Schwerefeld g existiert ein Optimum:

Nach Libby[34] kann man sich von der einschränkenden Voraussetzung der konstanten Erd-Gravitationsfeldstärke freimachen, indem man ein Zentrifugalfeld anwendet.

Die Transportfaktoren haben die Potenzabhängigkeiten

$$H \sim g^1$$

$$K_k \sim g^2$$

$$K_d \sim g^0.$$

Die Variation $\frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{ag}{g^2 + b} \right) = 0$ liefert das Optimum $g^2 = b$ und damit $K_k = K_d$. Aus dieser Optimalbedingung $\frac{K_k}{K_d} = 1$ erhält man das optimale Schwerfeld g_{opt} [55].

7. Für die Temperaturdifferenz ΔT bzw. $\bar{T}$ existiert ein Optimum [57]. Die Transportfaktoren haben die Temperaturabhängigkeiten

$$H \sim \left(\frac{\Delta T}{\bar{T}} \right)^2 \left[\frac{\alpha(\bar{T})}{\eta(\bar{T})} \right]$$

$$K_k \sim \left(\frac{\Delta T}{\bar{T}} \right)^2 \left[\frac{1}{D(\bar{T}) \cdot \eta^2(\bar{T})} \right]$$

$$K_d \sim D(\bar{T})$$

Aus der Variation $\frac{\partial}{\partial(\Delta T)} \left(\frac{H}{K_k + K_d} \right) = 0$ erhält man die optimalen Betriebstemperaturen T_1, T_a der Trennröhrwände, sofern man die Temperaturabhängigkeiten der Gaseigenschaften $\eta(T)$, $D(T)$, $\alpha(T)$ für das Trenngas kennt. Die Wahl der mittleren Temperatur $\bar{T}$ hängt dabei wesentlich von der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ ab.

Entnahmefreie Trennung

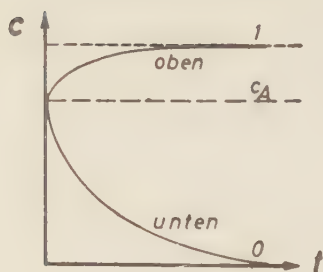


Abb. 7 : Einstellvorgang:
Die Konzentration c als
Funktion der Zeit t

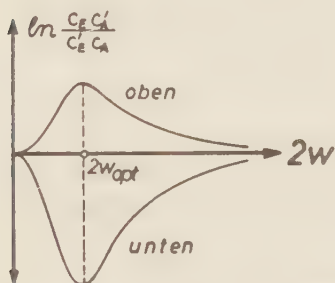


Abb. 9 : Trennschärfe $\ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A}$
als Funktion der Trennschalt-
weite $2w$

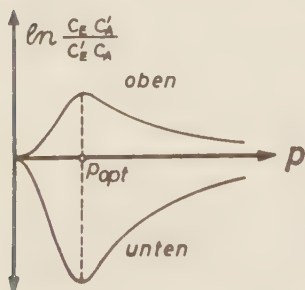


Abb. 11 : Trennschärfe $\ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A}$
als Funktion des Druckes p

Kontinuierliche Trennung

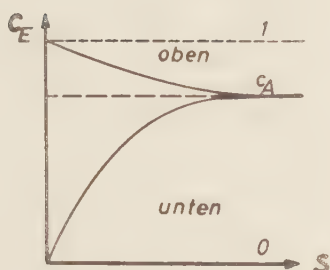


Abb. 8 : Endkonzentration c_E
als Funktion der Entnahme s

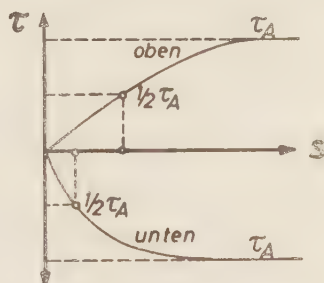


Abb. 10 : Eigentransport τ
 $= s(c_E - c)$ als Funktion der
Entnahme s

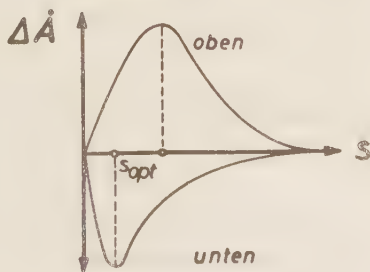


Abb. 12 : Differentielle
Trennleistung $\Delta A \sim \tau \cdot \Delta \ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A}$
als Funktion der Entnahme s

Diskussion:

- a. Die Optimalbedingungen für den Trenndruck (bei vorgegebener Spaltweite) und für die Spaltweite (bei vorgegebenem Druck) sind unterschiedlich [11]. Die Abweichung des optimalen Verhältnisses $\frac{K_k}{K_d} = 1$ bzw. $\frac{K_k}{K_d} = \frac{1}{2}$ ergibt für die Spaltweite $(2w)_{opt}$ eine Änderung um 12%. Sie wirkt sich aber auf die Trennschärfe $\bar{Z} \frac{H}{K}$ nur mit 5% aus, da das Maximum gegen kleine Änderungen von $2w$ oder p recht unempfindlich ist.
- b. Die Tatsache, daß die Trennschärfe überhaupt optimierbar ist, beruht auf der Existenz des Rücktransportfaktors K_d . (Eine Ausnahme bildet nur das Maximum bezüglich der Entnahme s (Abb. 8), das unabhängig von K_d stets bei $s = 0$ liegt.) Setzt man versuchsweise $K_d = 0$ an, so wird $\frac{K_k}{K_d} \rightarrow \infty$ und damit $p_{opt} \rightarrow \infty$, $2w_{opt} \rightarrow \infty$; es treten dann keine im Endlichen liegenden Optimalwerte mehr auf. Die Existenz der Maxima beruht also physikalisch auf dem Phänomen der Rückdiffusion.
- c. Die Optimalbedingung der Trennschärfe läßt sich auch aus einem einfachen gaskinetischen Bild ableiten: Nach Kap. 2 ist die Vervielfachung des Thermodiffusionseffektes am wirksamsten, wenn die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit gleich der mittleren Diffusionsgeschwindigkeit der Isotope von der heißen zur kalten Wand ist [55]:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_d.$$

Verknüpft man die Werte $\bar{v}_k = (2w)^2 \left[\frac{\rho g}{192 \eta} \frac{\Delta T}{T} \right]$, $\bar{v}_d = \frac{2w}{t}$ (t = Diffusionszeit eines Moleküls von der kalten zur heißen Wand) mit der Einstein-Relation [33]

$$(2w)^2 = 2Dt$$

so erhält man für den optimalen Spaltabstand

$$(2w)_{opt} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^7 \frac{D \eta}{g g \Delta T}}.$$

Diese durchsichtige molekularkinetische Überlegung liefert also exakt dasselbe Ergebnis wie die hydrodynamische Transporttheorie (11).

- d. Aufschlußreich ist eine Abschätzung der optimalen Gegenstromverstärkung im Vergleich zum elementaren Thermodiffusionseffekt: Ohne Konvektion erhält man nach (1)(2) den elementaren Trennfaktor

$$\frac{dc}{cc'} = \alpha \frac{\Delta T}{T}.$$

Mit Konvektion erhält man das Maximum der Trennschärfe für

$$\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'} = Z \left(\frac{H}{K} \right)_{opt} = \frac{Z}{2 \cdot (2w)_{opt}} \cdot \alpha \frac{\Delta T}{T}.$$

Die in einem Trennrohr maximal erzielbare Verstärkung ist also

$$\frac{Z}{2 \cdot (2w)_{opt}}.$$

Sie hängt nur vom Verhältnis der Rohrlänge zur optimalen Spaltweite ab. Im praktisch wichtigen Fall des optimalen Drahtrohrs ergibt sich also für die maximale Vervielfachung des Elementartrennfaktors der einfache Zusammenhang

$$\frac{\text{Trennschärfe mit Konvektion}}{\text{Trennschärfe ohne Konvektion}} = \frac{\text{Rohrlänge}}{\text{Lichte Rohrweite}}.$$

Hieraus erkennt man klar die enorme Wirksamkeit des Gegenstromprinzips als Grundgedanken des Trennrohrverfahrens.

- e. Um ein Trennrohr mit maximaler Trennschärfe zu betreiben bzw. eine möglichst hohe Endkonzentration c_E zu erzielen, stellt man (bei vorgegebener Spaltweite $2w$) den optimalen Arbeitsdruck p_{opt} möglichst genau ein und arbeitet entnahmefrei ($s = 0$). Die optimale Heiztemperatur T_1 wird am sichersten empirisch ermittelt.

Arbeitet man mit einem an beiden Enden abgeschlossenen Rohr, so stellt sich zwischen den Rohrenden die Trennschärfe $Z \left(\frac{H}{K} \right)_{opt}$ ein. Man erhält aber nicht die aus $\ln \frac{c_E c_A'}{c_E' c_A}$ berechenbare Endkonzentration c_E : Da mit der Anreicherung am einen Ende eine entsprechende Abreicherung am anderen Ende verbunden ist, erzielt man bei gleicher Trennschärfe doch eine wesentlich geringere Endkonzentration. Sie läßt sich aber auf einfache Weise steigern: Man sorgt dafür, daß am einen Rohrende

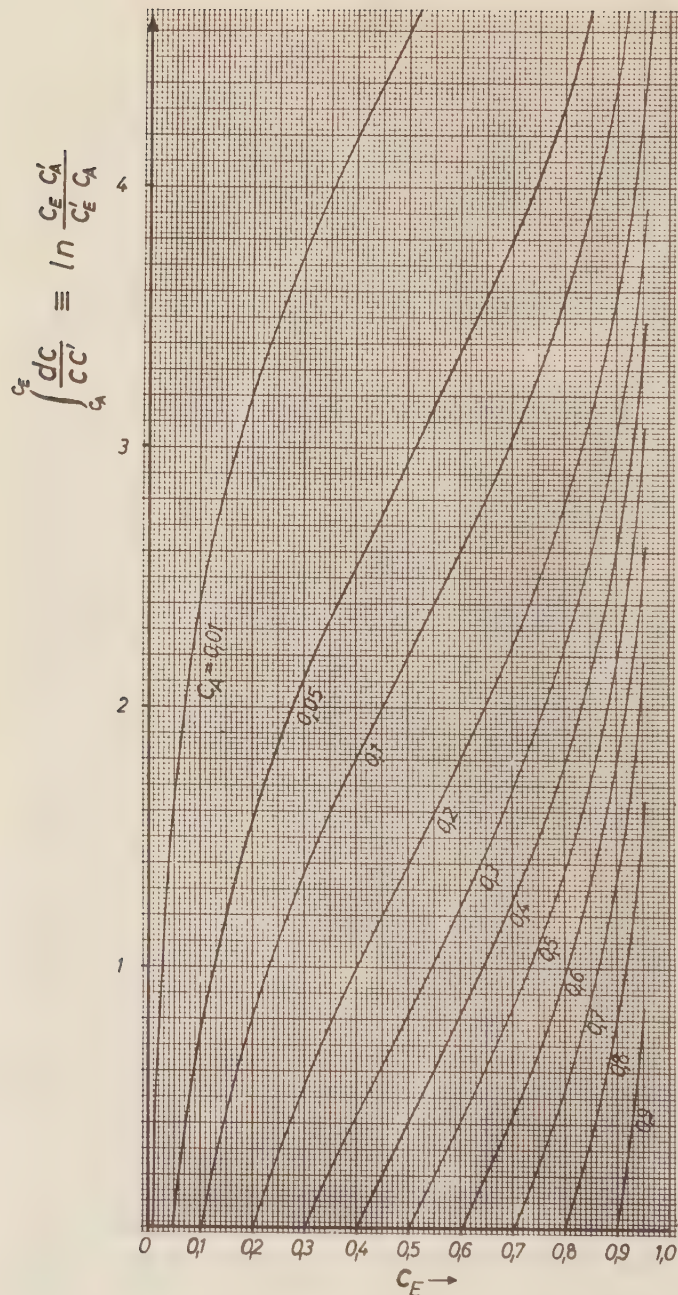


Abb.13 : Die Trennschärfe $\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{c c'} = \ln \frac{c_E c_A'}{c_E' c_A}$ als Funktion der Entnahmekonzentration c_E . Parameter c_A' .

die Ausgangskonzentration c_A nicht abgereichert wird. Dies gelingt durch kontinuierliche Spülung mit Frischgas oder durch ein großes Vorratsvolumen. Das Trennrohr maximaler Trennschärfe ist dann vor allen anderen Trennröhren dadurch ausgezeichnet, daß es bei fester Endkonzentration c_E die kürzeste Rohrlänge Z erfordert, bzw. bei fester Rohrlänge Z die höchstmögliche Endkonzentration c_E erzielt.

10. Thermodynamische Trennleistung

Die quantitative Erfassung der Leistungsfähigkeit einer Isotopentrennanlage erfordert eine Verknüpfung der erzielten Endkonzentration c_E mit dem kontinuierlichen Entnahmestrom s . Um für die Produktionsleistung einen allgemeinen Maßstab zu haben, untersucht man die zur isothermen Entmischung (Entropieabnahme) thermodynamisch mindestnotwendige Arbeit.

Hierzu erfindet man nach einem Gedankenexperiment von Planck[46] modellmäßig eine "ideale" Trennanlage (Abb. 14). Man konstruiert sie mittels zweier beweglicher semiparmeabler Trennwände, von denen jede nur für eine der beiden Molekülsorten durchlässig ist. Der Modellprozeß überführt das binäre Gemisch idealer Gase auf reversibel-isotherme Weise aus dem Anfangszustand (c_A, c_A') in den angereicherten Endzustand (c_E, c_E'). Die hierfür erforderliche reversible Entmischungsarbeit gibt den thermodynamisch geringstmöglichen Leistungsverbrauch zur Trennung isotoper Gase an [47]. Er dient daher bei "realen" Trennanlagen als Maß für die erzielte Trennleistung.

Die reversibel-isotherme Führung des thermodynamischen Idealversuches erfordert Expansions- bzw. Kompressionsarbeit gegen den Partialdruck p_c der beiden Gaskomponenten. Die gesuchte Isotopenkomponente (ideales Gas; $dT = 0$; $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$; $dU(T,V) = \delta Q_{rev} - p dV = 0$) erfährt bei der partiellen Entmischung ($c_A \rightarrow c_E$) eines Mols ($c_E + c_E' = 1$) die Entropieabnahme

$$\Delta S = \int_A^E \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int_A^E \frac{p_c dV}{T} = -c_E R \ln \frac{p_{cE}}{p_{cA}} = -R c_E \ln \frac{c_E}{c_A}.$$

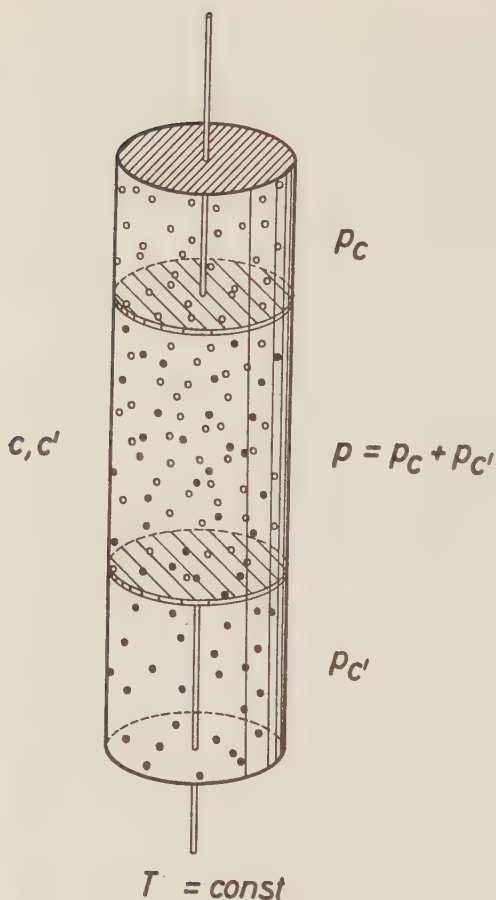


Abb.14 : "Reversibles Trennrohr": Thermodynamischer Modellversuch nach Planck zur reversibel - isothermen Entmischung zweier (isotoper) Gase.

Das Rohr enthält zwei bewegliche semipermeable Trennwände. Durch Einschieben dieser Stempel unter Arbeitsaufwand lassen sich im mittleren Teil beliebige Mischungen c, c' herstellen.

Für die Begleitkomponente ($c'_A \rightarrow c'_E$) ist entsprechend

$$\Delta S' = -R c_E \ln \frac{c'_E}{c'_A}.$$

Da das Gesamtvolumen und der Gesamtdruck beider angereicherten Fraktionen konstant bleibt, ist die gesamte Entropieabnahme

$$\Delta S + \Delta S'.$$

Die reversible Entmischungsarbeit bei der Temperatur T pro Mol Trennprodukt ist dann

$$A = T \cdot (\Delta S + \Delta S') = -RT \left[c_E \ln \frac{c_E}{c_A} + c'_E \ln \frac{c'_E}{c'_A} \right].$$

Sie liegt in der Größenordnung RT des thermischen Energieinhaltes des Gases selbst.

Führt man den Entmischungsprozeß kontinuierlich durch, so ist die Entropieabnahme dem zeitlichen Durchsatz der Trennanlage proportional (s = Masse/Zeit, M = Molmasse). Der minimale Leistungsverbrauch des "reversiblen Trennrohrs" ist also [37][21]

$$\dot{A} = T \cdot \Delta S_E = -\frac{s}{M} \cdot RT \left[c_E \ln \frac{c_E}{c_A} + c'_E \ln \frac{c'_E}{c'_A} \right] \equiv -\frac{RT}{M} \cdot s \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{c c'} dc. \quad (12)$$

Diese Trennleistung gibt die maximal gewinnbare Arbeit/Zeit an, die man bei reversibel-isothermer Rückvermischung aus den beiden angereicherten Fraktionen herausholen kann⁺⁾ . Damit läßt sich die Leistungsfähigkeit realer irreversibler Isotopentrennanlagen unmittelbar zur Leistung der "idealen" reversiblen Trennanlage ins Verhältnis setzen und dadurch messen.

Das Integral $\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{c c'} dc$ ist als Funktion der Anfangs- und Endkonzentration des gewünschten Isotops in Abb. 15 graphisch dargestellt.

11. Maximum der Trennleistung

Zur Gesamtrennleistung der Anlage

$$\dot{A} = -\frac{s}{M} RT \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{c c'} dc$$

⁺⁾ Vgl. Fleischmann, R. und Jensen J.H.D [37] S.151

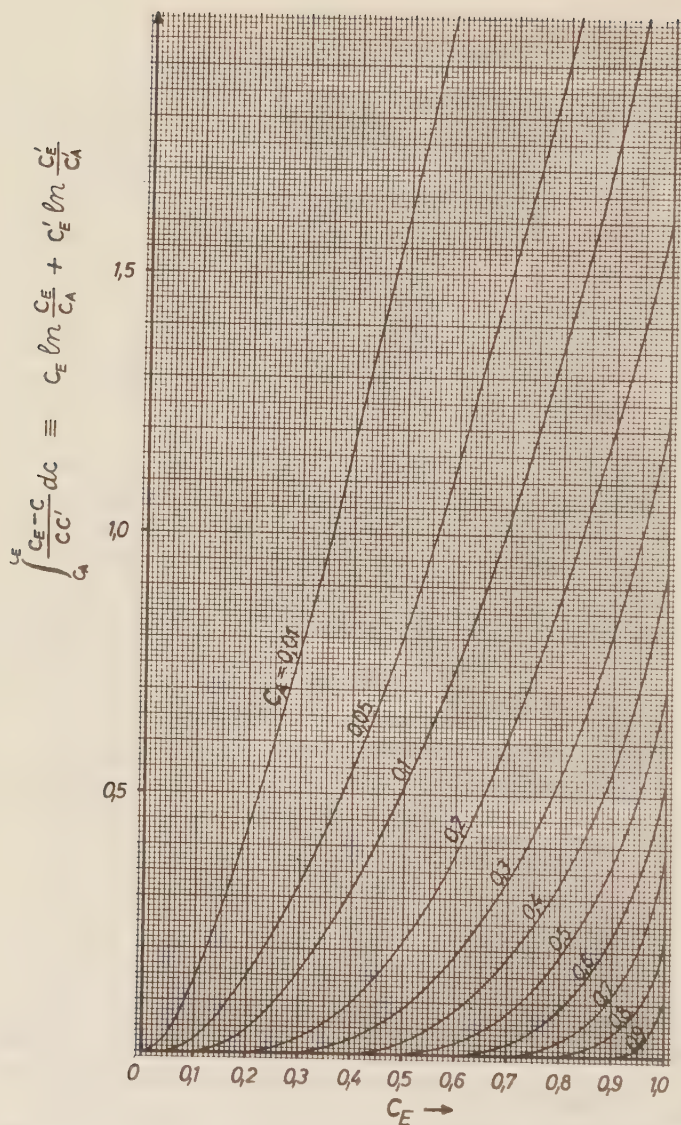


Abb.15 : Die Trennleistung (minimale Trennarbeit $\sim \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{c c'} dc$)
als Funktion der Entnahmekonzentration c_E . Parameter c_A .

leistet jedes differentielle Trennrohrstück, in dem sich die Konzentration c um dc ändert, den Beitrag

$$d\dot{A} \sim s(c_E - c) \cdot \frac{dc}{cc'}.$$

Das betrachtete Rohrstück wird vom Eigentransport $\tau = s(c_E - c)$ durchströmt. Es leistet zur Gesamttrennschärfe $\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'}$ den Beitrag $\frac{dc}{cc'}$.

Das Produkt des Transportes τ (Quantitätsgröße) und der differentiellen Trennschärfe $\frac{dc}{cc'}$ (Qualitätsgröße) kennzeichnet demnach als Verknüpfung von Menge und Anreicherung des durchströmenden Trenngutes unmittelbar den Beitrag des Trennelementes zur Trennleistung.

Für jedes solche Rohrstück ändern sich der durchfließende Transport und der Beitrag zur Trennschärfe als Funktion der Entnahme nach Kap. 7, Punkt 3 gegenläufig (Abb. 8, Abb. 10). Ihr Produkt

$$s(c_E - c) \cdot \frac{dc}{cc'} = \frac{\tau}{\tau_A} H dc$$

durchläuft also ein Maximum:

Trennt man mit verschwindender Entnahme ($s = 0$), so ist der Transport Null; trennt man mit sehr großer Entnahme, so ist die Trennschärfe Null. In beiden Fällen ist dann die Trennleistung Null. Dazwischen befindet sich das gesuchte Maximum.

Um es zu finden, betrachten wir den Transportverlauf an jeder Stelle z des Trennrohrs:

Der Eigentransport (3)

$$\tau(z) = \tau_A(z) - K \frac{dc}{dz} = s(c_E - c(z))$$

ist längs der stationären Trennrohranlage eine kontinuierliche Variable:

$$0 \leq \tau(z) \leq s(c_E - c_A).$$

Der Anfangstransport

$$\tau_A(z) = H(z) \cdot c(z) \cdot c'(z)$$

ist entlang der Rohrlänge z ebenfalls variabel:

Wir fassen die beiden Variablen $\tau(z), \tau_A(z)$ zusammen und führen den reduzierten Transport $\frac{\tau(z)}{\tau_A(z)}$ als neue Variable ein:

$$\frac{\tau(z)}{\tau_A(z)} = \frac{\delta}{H} \frac{c_E - c}{cc'}.$$

Er ist für die Dimensionierung des Isotopenstroms in jedem Rohrstück die entscheidende Größe. Der konzentrationsabhängige Anteil $\frac{c_E - c}{cc'}$ ist als Funktion der laufenden Konzentration c und der Endkonzentration c_E in Abb.16 graphisch dargestellt.

Der dimensionslose reduzierte Transport hat längs der Anlage eine obere und untere Grenze.

$$0 \leq \frac{\tau(z)}{\tau_A(z)} < 1.$$

Die Problemstellung lautet dann:

Wie muß man den Verlauf des reduzierten Transportes längs einer Anlage gestalten, damit jedes Trennelement seinen optimalen Beitrag leisten kann. Für welchen Wert der Variablen $\frac{\tau}{\tau_A}$ ist dieser Beitrag am größten?

Zur Berechnung lösen wir die Eigentransportgleichung (3) nach dem Differential dc auf und setzen es in den Ausdruck für die differentielle Trennleistung ein:

$$d\dot{A} \sim \frac{\tau}{\tau_A} H dc = \frac{\tau}{\tau_A} [\tau_A - \tau] \frac{H}{K} dz = \frac{\tau}{\tau_A} \left[1 - \frac{\tau}{\tau_A} \right] \cdot \left(\tau_A \frac{H}{K} dz \right).$$

Das Maximum bezüglich der Variablen $\frac{\tau}{\tau_A}$ folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_A} \right)} d\dot{A} = 0$$

Man erhält die Optimalbedingung

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Ist die Trennleistung $d\dot{A}$ in jedem Trennelement maximal, so ist sie es auch für das Gesamtrohr⁺⁾ .

Um eine Trennanlage mit optimaler Trennleistung zu betreiben, muß man also versuchen, den reduzierten Transport an jeder

⁺⁾ Siehe Fußnote Kap.9

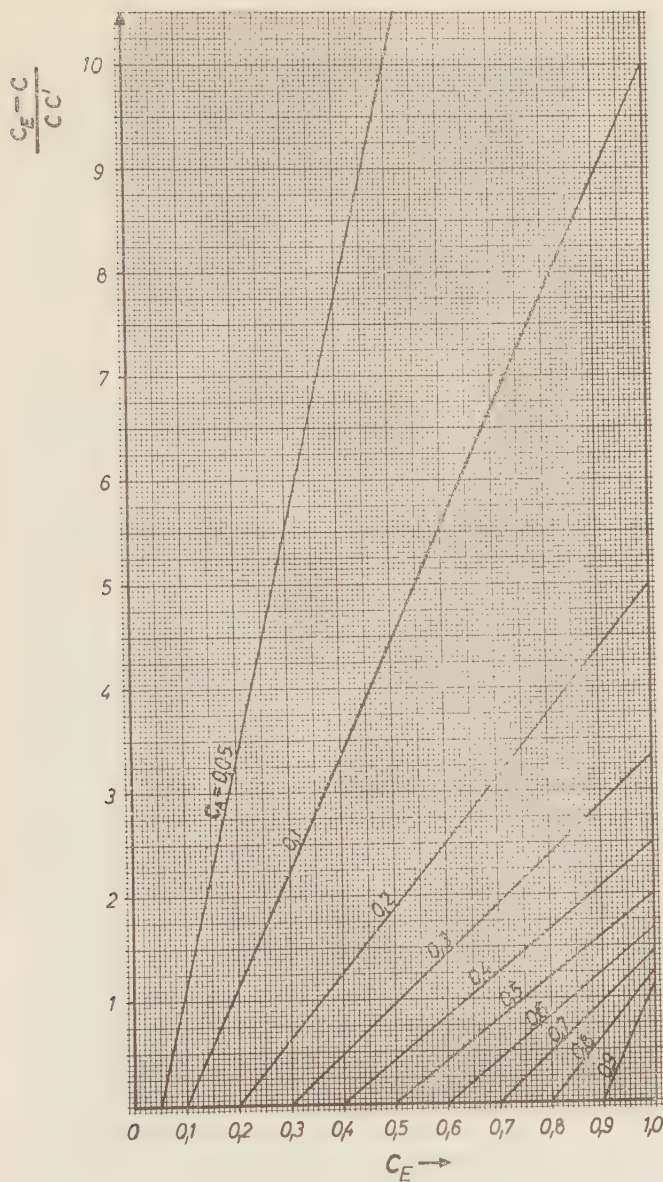


Abb.16 : Der reduzierte Transport $\frac{\tau}{\tau_A} \sim \frac{c_E - c}{c c'}$ als Funktion der Entnahmekonzentration c_E . Parameter c_A .

Stelle z des Rohres konstant gleich $\frac{1}{2}$ zu machen.

Nach der Art der Herleitung gilt diese einfache $\frac{1}{2}$ -Bedingung ganz unabhängig von der speziellen Trennmethode für alle kontinuierlichen Trennprozesse, die eine Transportgleichung der allgemeinen Form (3) erfüllen. Zum gleichen Ergebnis kommen Cohen [15], Dickel und Schildknecht [21].

Beim Trennrohr ist diese Optimalbedingung nur dann erfüllbar, wenn man die Einschränkung konstanten Rohrquerschnitts ($f = \text{const} \rightarrow H = \text{const}$) fallenläßt und den Transportfaktor H zu einer Variablen $H(z)$ macht.

Man erhält dadurch Rohrformen, bei denen der Rohrfumfang (Plattenbreite) von seinem Größtwert an der Einspeisestelle (c_A) längs des Rohres kontinuierlich verringert wird. Zum Entnahmeende (c_E) hin nimmt er auf Null ab.

Trennanlagen optimaler Leistung sind also keine Zylinderrohre von konstantem Querschnitt mehr, sondern haben die Form von Pyramiden: Die Pyramidenbasis wird mit Frischgas (c_A) gespeist, an der Pyramidenspitze wird das angereicherte Endprodukt (c_E) entnommen. Die Basisbreite wird entscheidend vom Durchsatz s bestimmt, die Pyramidenhöhe von der gewünschten Trennschärfe⁺).

Die $\frac{1}{2}$ -Bedingung erweist sich beim Trennrohr aber nur als eine Grenzbedingung. Es ergeben sich folgende Einschränkungen:

1. Zum Entnahmeende hin geht τ gegen Null. Also müßte nach (13) dort auch $\tau_A = 0$ werden. Damit wäre aber der Rohrquerschnitt $f = 0$. Man könnte also keinen kontinuierlichen Gasstrom am Rohrende entnehmen: Die gewünschte kontinuierliche Trennung wäre unmöglich.
2. Für $\tau_A \approx 0$ ist der Rohrquerschnitt $f \approx 0$. Der kontinuierlich entnommene Gasstrom $s = \rho f \bar{v}_s$ würde eine mittlere Entnahmegeschwindigkeit $\bar{v}_s$ erfordern, die groß gegenüber der mittleren Konvektionsgeschwindigkeit $\bar{v}_k$ wäre. Damit entfielen die Voraussetzung $\bar{v}_s \ll \bar{v}_k$ in Kap.5: Die Transportfaktoren H, K würden Funktionen der Entnahme s und damit des Transportes.

⁺) Will man gleichzeitig das Begleitisotop optimal gewinnen, so koppelt man eine entsprechend dimensionierte Abreicherungspyramide an der Einspeisestelle an.

Der Rohrquerschnitt muß also auch zum Entnahmeende hin genügend groß bleiben und darf nicht gegen Null gehen. Das bedeutet, daß stets $\tau_A > 0$ sein muß.

Statt den reduzierten Transport $\frac{\tau(z)}{\tau_A(z)}$ längs des Rohres auf dem "idealen" Wert $\frac{1}{2}$ konstant zu halten, hat man ihn längs z , also zwischen den "optimalen" Grenzen

$$0 \leq \frac{\tau(z)}{\tau_A(z)} \leq \frac{1}{2} \quad (14)$$

durch geeignete geometrische Dimensionierung variabel zu gestalten.

Liegt andererseits ein Trennrohr mit starr vorgegebener Geometrie vor, so muß man, um es optimal zu betreiben, durch Wahl einer geeigneten Entnahme s und eines geeigneten Trenndruckes p die Konzentrationsschichtung $c(z)$ so einstellen, daß der reduzierte Transport längs des Rohres im obigen Sinn optimal verläuft.

Das wird im allgemeinen nicht für alle Rohrelemente gleichzeitig exakt gelingen, sondern nur im Mittel. Hierbei ist es von entscheidender Bedeutung, wegen der scharfen Maxima von Trennschärfe und Trennleistung (Abb. 11, Abb. 12) gleichzeitig sowohl den optimalen Betriebsdruck p als auch die optimale Entnahme s sehr genau einzustellen. (Beispiel siehe Kap. 31).

Die Bedingungen für maximale Trennschärfe $\int_{c_A}^c \frac{dc}{CC'}$ und maximale Trennleistung $\int_{c_A}^c \frac{CE - C}{CC'} dc$ schließen sich zunächst ^{*)} gegenseitig aus: Das Maximum der Trennschärfe liegt immer bei $s = 0$, das Maximum der Trennleistung liegt immer bei $s \geq 0$. Man kann die Lage beider Maxima bezüglich der Entnahme s nicht zur Deckung bringen. Nur im Grenzfall, daß man für verschwindende Entnahme ($s \rightarrow 0$) das Optimum der Trennleistung erzielen will, fallen beide Maxima (bezüglich ihrer Lage auf der s -Achse) asymptotisch zusammen (Abb. 8, Abb. 12).

Damit haben wir einen Zusammenhang zwischen der Trennung mit maximaler Trennschärfe und der Trennung mit maximaler Trenn-

^{*)} Näheres siehe Kap. 25, Punkt 6.

leistung gefunden: Die praktisch wichtige Trennung maximaler Schärfe ist der asymptotische Grenzfall der Trennung maximaler Leistung, wenn die zu gewinnende Isotopenmenge s minimal sein soll.

Dieses Ergebnis werden wir in Kap. 25 auf ganz andere Weise wiederfinden und in detaillierter Form zum Kriterium einer Theorie von Trennrohranlagen mit optimalem Wirkungsgrad machen.

12. Thermodynamischer Wirkungsgrad

Bei jeder Isotopentrennung ist der Wirkungsgrad als Verhältnis des erzielten Trennerfolgs zum geleisteten Aufwand der entscheidende Punkt. Er gibt bei der Konkurrenz verschiedener Trennmethoden den Ausschlag über die Wahl des zweckmäßigsten Trennverfahrens.

Man unterscheidet dabei zwei thermodynamisch verschiedene Typen von Trennprozessen [53]:

R e v e r s i b l e T r e n n v e r f a h r e n (z.B. Gaszentrifuge, Destillation, chemischer Austausch) haben einen reversiblen Elementareffekt. Außer der Entmischungsentropie (12) $\dot{S}_E$ tritt keine zusätzliche Entropieproduktion auf, außer durch irreversible Nebeneinflüsse wie z.B. die Lagerreibung bei der Gaszentrifuge.

I r r e v e r s i b l e T r e n n v e r f a h r e n (z.B. Thermodiffusion, Diffusion, Trenndüse) haben einen Elementareffekt, der zwangsläufig mit irreversiblen Vorgängen gekoppelt ist wie z.B. die irreversible Wärmeleitung beim Trennrohr. Auf der Grundlage der Thermodynamik irreversibler Prozesse definierte Onsager [61] [50] den thermodynamischen Wirkungsgrad aus der Entropiebilanz des Trennprozesses.

Es werden dabei zwei Entropiebeiträge zueinander ins Verhältnis gesetzt:

1. Entropieänderung des Trennprodukts infolge der Entmischung: Die thermodynamische Berechnung (Kap.10) ergab den kontinuierlichen Entropiestrom (12)

$$\dot{S}_E = -\frac{R}{M} \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{c c'} dc \quad (15)$$

Er ist als Funktion von c_A, c_E , s unabhängig vom angewandten Trennverfahren und gibt den Leistungsverbrauch $\dot{A} = T \cdot \dot{S}_E$ der idealen Trennung an.

2. Gesamte Entropieerzeugung des Trennprozesses: Sie besteht aus der Entropieabnahme des Trennprodukts ($\dot{S}_E$) infolge der Entmischung und der Entropiezunahme infolge des geleisteten Aufwands ($\dot{S}_Q$). Letzterer hängt stark von der Wahl des eingeschlagenen Trennverfahrens ab. Beim Trennrohr ist zur Erzielung der Thermodiffusion ein Temperaturgefälle $T_1 - T_a$ erforderlich. Damit ist zwangsläufig ein Wärmestrom $\dot{Q}$ verbunden. Er erzeugt als irreversibler Prozeß den Entropiestrom

$$\dot{S}_a = \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_i} \right) \cdot \dot{Q}. \quad (16)$$

Der thermodynamische Wirkungsgrad wird dann durch das Verhältnis $\frac{\dot{S}_E}{\dot{S}_Q + \dot{S}_E}$ bestimmt. Auf Grund der Proportionalität mit den zugehörigen Energien ($\dot{S}_E \sim A$, $\dot{S}_Q \sim \dot{Q}$) definiert man [19]

$$\eta_{th} = \frac{|\dot{A}|}{\dot{Q} + |\dot{A}|}. \quad (17)$$

Dieser Quotient setzt den idealen Planck'schen Modellversuch ("Reversibel-isothermes Trennrohr", Abb. 14) in direkte Relation zur realen Ausführung einer Trennrohranlage (Abb. 1). Der Wirkungsgrad kennzeichnet also unmittelbar das Verhältnis des thermodynamisch mindestnotwendigen Arbeitsaufwands bei isothermer Trennung zum tatsächlichen Energieverbrauch eines Trennrohrs mit Temperaturgefälle.

13. Maximum des Wirkungsgrades

Das Problem, den thermodynamischen Wirkungsgrad einer Trennanlage so günstig wie möglich zu gestalten, bedeutet die Optimierung des Verhältnisses

$$\eta_{th} = \frac{|\dot{A}|}{\dot{Q} + |\dot{A}|} .$$

Wir suchen das Maximum für alle auftretenden Werte der Anfangskonzentration c_A , der gewünschten Endkonzentration c_E und der geforderten Produktionsrate s .

Nach der allgemeinen Optimierungstheorie [16] kann man jede Extremalaufgabe, bei der eine gesuchte Zielfunktion $\eta_{th}(c_A, c_E, s)$ linear auftritt, d u a l behandeln:

Jeder Maximalaufgabe der linearen Optimierung kann eine Minimalaufgabe zugeordnet werden und umgekehrt.

Infolge dieser D u a l i t ä t kann die Optimierung des Wirkungsgrades sowohl als M a x i m a l a u f g a b e

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \max \\ \dot{Q} &= \text{const} , \end{aligned}$$

als auch als M i n i m a l a u f g a b e

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \text{const} \\ \dot{Q} &= \min \end{aligned}$$

behandelt werden.

Damit ergeben sich z w e i Lösungsmöglichkeiten:

Die erste Aufgabenstellung bedeutet das Aufsuchen der Bedingungen, unter denen man ein Maximum an Trennleistung für einen vorgegebenen Heizleistungsbetrag erzielt.

Die zweite Aufgabenstellung bedeutet das Aufsuchen der Bedingungen, unter denen man eine vorgegebene Trennleistung mit minimaler Heizleistung erzielt.

Der optimale Wert der Zielfunktion $\eta_{th}(c_A, c_E, s)$ ist dann für beide Aufgaben gleich.

Damit ergibt sich eine einfache und wirksame Methode zur Prüfung der inneren Konsistenz der Lösungen.

Die Maximalaufgabe

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \max \\ \dot{Q} &= \text{const}\end{aligned}$$

wurde in Kap.11 bereits behandelt und führte auf eine Optimalbedingung (14) für den Transportverlauf in einer Trennkaskade.

Die duale Minimalaufgabe

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \text{const} \\ \dot{Q} &= \min\end{aligned}$$

führt über die Optimierung des Energiestroms unmittelbar auf die geometrische Dimensionierung der Trennrohrkaskaden.

14. Thermischer Energiestrom

Der Thermodiffusions-Trennprozeß erfordert ein Temperaturgefälle zwischen heißer und kalter Wand: Einerseits, um den elementaren Thermodiffusionseffekt zu erzeugen, andererseits, um seine hydrodynamische Verstärkung durch die Gegenstromkonvektion zu ermöglichen.

Mit der Aufrechterhaltung des Temperaturgefälles ist ein ständiger Wärmestrom

$$\dot{Q} = - \oint (\lambda \text{grad } T) d\vec{F} \quad (18)$$

verbunden, der von der heißen zur kalten Wandfläche F übergeht. Um ihn zu berechnen, führen wir im Fall des planparallelen Rechteckrohrs ein kartesisches Koordinatensystem, im Fall des Zylinderrohrs ein zylindrisches Koordinatensystem ein^{+) (Abb. 17, Abb. 18):}

Rechteckrohr: x = Spaltweite
 y = Spaltbreite
 z = Spatlänge

Zylinderrrohr: R_a = Äußerer Rohrradius
 R_i = Innerer Rohrradius
 z = Rohrlänge

^{+) In Teil I wurden zur Berechnung der hydrodynamischen Strömungsprofile die laufenden Koordinaten $-w \leq x \leq +w$, $-b \leq y \leq +b$ eingeführt (Abb. 2). Sie werden nach der Berechnung der Transportfaktoren H, K_k, K_d und der Formfaktoren φ, ψ, χ nicht mehr benötigt. Da die Transportfaktoren bei optimierten Trennanlagen nicht mehr konstant, sondern entlang der Rohre in ganz bestimmter Weise variabel sind, nehmen wir für die folgenden Kapitel eine vereinfachende Umbenennung der Bezeichnungen vor: Um die Trennspaltweite $2w$ bzw. Trennspaltbreite $2b$ als Variable zu kennzeichnen, schreiben wir abkürzend $2w \equiv x$, $2b \equiv y$.}

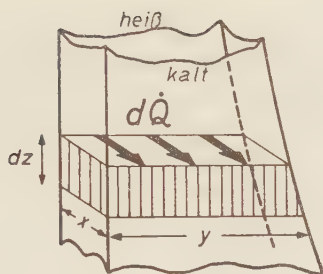


Abb.17 : Differentieller Wärmestrom im Rechteckrohr

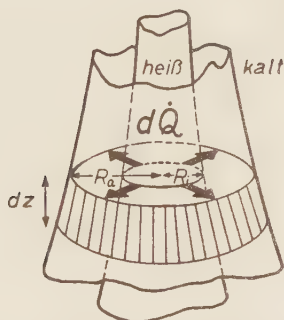


Abb.18 : Differentieller Wärmestrom im Zylinderrohr

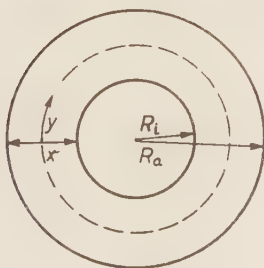


Abb.19 : Zur Umrechnung der Koordinaten bei planparalleler (x, y) oder zylindrischer (R_a, R_i) Rohrgeometrie

Der Energieverbrauch ergibt sich unter der Voraussetzung $\lambda = \text{const}$ und Berücksichtigung der Randbedingungen durch Integration von (18): Für ein differentielles Trennelement von der Länge dz erhält man beim

$$\text{Rechteckrohr} \quad d\dot{Q} = \lambda(T_i - T_a) \cdot \frac{y}{x} \cdot dz \quad (19)$$

$$\text{Zylinderrohr} \quad d\dot{Q} = \lambda(T_i - T_a) \cdot \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot dz \quad (20)$$

15. Minimum des Energiestroms

Kernproblem der Isotopentrennung ist die energetische Optimierung: Für eine fest vorgegebene Trennaufgabe (Konstante: c_A, c_E, s) sucht man das Minimum des erforderlichen Energieverbrauchs $\dot{Q}$.

Hierzu macht man für jedes differentielle Rohrstück dz , in dem die Konzentration von c auf $c + dc$ steigt, den Energieverbrauch zum Minimum, indem man die Rohrgeometrie geeignet variiert⁺⁾ .

Aus der Gleichung (3) des stationären Eigentransports folgt für den Zusammenhang zwischen dc und dz

$$\frac{dz}{dc} = \frac{K}{Hcc' - s(c_E - c)} .$$

Für ein differentielles Rohrstück ist demnach der Energieverbrauch (19)(20) beim

$$\text{Rechteckrohr} \quad d\dot{Q} = \lambda(T_i - T_a) \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{K_k + K_d}{Hcc' - s(c_E - c)} dc \quad (21)$$

$$\text{Zylinderrohr.} \quad d\dot{Q} = \lambda(T_i - T_a) \cdot \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \frac{K_k + K_d}{Hcc' - s(c_E - c)} dc . \quad (22)$$

⁺⁾ Siehe Fußnote Kap.9

Die Optimierungsaufgabe lautet dann:

Die geometrischen Variablen x, y bzw. R_a, R_i (die explizit und implizit in Form der Transportfaktoren H, K_k, K_d und ihrer Formfaktoren φ, ψ, χ) auftreten, sind so zu bestimmen, daß $d\dot{Q}$ ein Minimum wird⁺). Dabei ist die Nebenbedingung $c_A, c_E, s = \text{const}$ zu erfüllen.

Die Minimalaufgabe

$$\dot{A} = \text{const}$$

$$\ddot{Q} = \min$$

führt dann auf die geometrische Dimensionierung der Trennrohre.

+)

Der Energieverbrauch durch Wärmestrahlung ist nach Stefan - Boltzmann

$$\dot{Q}_{\text{Strahlung}} = \sigma (T_i^4 - T_a^4) F \frac{(1-r_i)(1-r_a)}{1-r_i r_a}$$

(Strahlungskonstante $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ Watt} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{Grad}^{-4}$; r_a, r_i = Reflexionskoeffizienten von heißer und kalter Wand¹). Er tritt erst bei hohen Temperaturen T_i im Vergleich zu $\dot{Q}_{\text{Leitung}}$ merklich in Erscheinung.

Wegen seiner Proportionalität zur strahlenden Mantelfläche F wird er als multiplikatives Zusatzglied zu $\dot{Q}_{\text{Leitung}}$ in die Gleichungen eingeführt [17].

Um das Wesentliche klarer erkennen zu lassen und die Gleichungen nicht unnötig zu komplizieren, vernachlässigen wir diesen Anteil, da er durch Annahme ideal spiegelnder Kühlwände ($r_a = 1$) prinzipiell vermeidbar ist.

III GEOMETRISCHE DIMENSIONIERUNG

16. Planparallele Optimierung

Die Geometrie jeden Trennelements ist durch z w e i Angaben vollständig und eindeutig bestimmt (Abb. 17, 18, 19).

Zur Auswahl stehen etwa folgende Kombinationen: x, y ; R_a, R_i ; $R_a - R_i$, $R_a + R_i$; $R_a - R_i$, $\frac{R_a}{R_i}$; ...

Welches dieser möglichen Variablenpaare man wählt, hängt von der mathematisch zweckmäßigen Behandlung des Ausdruckes $d\dot{Q}$ ab. Hat man sich für eines der Paare entschieden, so muß man es durchgehend in den Energieausdruck (21)(22) einführen: Alle geometrischen Abhängigkeiten in den Ausdrücken für den Wärmestrom, die Transportfaktoren und die Formfaktoren sind auf die gewählten Variablen umzuschreiben. Man kann sie nach dem Schema von Abb. 19 leicht ineinander umrechnen:

$$\text{Spaltweite} \quad x = R_a - R_i$$

$$\text{Spaltbreite} \quad y = 2\pi \frac{R_a + R_i}{2} = \pi(R_a + R_i)$$

$$\text{Seitenverhältnis} \quad \frac{y}{x} = \pi \frac{R_a + R_i}{R_a - R_i} = \pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1}.$$

Die Transportfaktoren wurden in Kap.5 in einen geometrischen und einen thermischen Anteil aufgespalten (4)(5)(6):

$$H = x^3 y \cdot \left[\frac{\rho^2 \alpha g}{3 \cdot 2^8 \eta} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right] \cdot \varphi$$

$$K_k = x^2 y \cdot \left[\frac{\rho^3 g^2}{3^2 \cdot 2^{15} \eta^2 D} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \right] \cdot \psi$$

$$K_d = x y \cdot [D_g] \cdot \chi.$$

Die Formfaktoren φ, ψ, χ hängen geometrisch gesehen für das Rechteckrohr nur vom Seitenverhältnis $\frac{x}{y}$, für das Zylinderrohr nur vom Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ ab (Abb. 4, 5).

Wir untersuchen zuerst das R e c h t e c k r o h r:

Im Ausdruck für den differentiellen Wärmestrom $d\dot{Q}$ (21) treten die Transportfaktoren und Formfaktoren in Potenzen von x und y auf:

$$H = x^3 y \cdot h \cdot \frac{3 \cdot 2^{12}}{\pi^6} \sum_{\substack{n=1,3,5,\dots \\ m=2,6,10,\dots}} \frac{1}{m^2 n^2 [m^2 + n^2 (\frac{x}{y})^2]}$$

$$K_A = x^2 y \cdot k_A \left(\frac{3 \cdot 2^{12}}{\pi^6} \sum_{\substack{n=1,3,5,\dots \\ m=2,6,10,\dots}} \frac{1}{m^2 n^2 [m^2 + n^2 (\frac{x}{y})^2]} \right)^2$$

$$K_d = x y \cdot k_d$$

Daraus ergibt sich die geometrische x, y -Abhängigkeit des Energieverbrauchs $d\dot{Q}$ (21).

Das Variationsproblem lautet dann

$$\begin{aligned} d\dot{Q} &= \min \\ sc_E &= \text{const} \end{aligned}$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} d\dot{Q} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} d\dot{Q} &= 0. \end{aligned}$$

17. Energetisch optimale Plattengeometrie

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall des unendlich breiten bzw. seitlich randlosen Plattenpaars.

Die Transportfaktoren haben dann einen mathematisch einfachen Bau, da die Formfaktorfunktion $\nu(\frac{x}{y}) = 1$ ist. Dieser relativ einfache Fall wurde erstmals von Krasny-Ergen [51] (1940) durchgerechnet.

Das Problem lautet: Wie muß man die Spaltweite x und die Spaltbreite y längs der Plattenhöhe z wählen, um eine geforderte Produktionsrate s von gegebener Konzentration c_E mit minimaler Heizleistung $\dot{Q}$ zu gewinnen.

Die Bedingungsgleichungen lauten nach (21)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \frac{K_k + K_d}{HCC' - \delta(C_E - C)} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \frac{K_k + K_d}{HCC' - \delta(C_E - C)} \right) = 0 \quad (24)$$

Mit

$$H = x^3 y \cdot h$$

$$K_k = x^2 y \cdot k_k$$

$$K_d = x y \cdot k_d$$

folgen die Lösungen

$$\text{aus (23)} \quad \frac{K_k}{K_d} \rightarrow \infty \quad (25)$$

$$\text{aus (24)} \quad \frac{\delta(C_E - C)}{HCC'} = \frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \quad (26)$$

Diese beiden differentiellen Optimalbedingungen liefern den gesamten geometrischen Aufbau der Plattenkaskade:

1. Die Trennspalbreite folgt aus (25):

$$x \rightarrow \infty \quad (27)$$

2. Die Trennspalbreite folgt aus (26)

$$y = \frac{2}{hx^3} \cdot \delta \frac{C_E - C}{CC'} \quad (28)$$

3. Die Plattenlänge ergibt sich durch Kombination der Optimalbedingung (26) $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$ und der Transportgleichung $\tau = \tau_A - K \frac{dc}{dz}$: Man erhält $\tau_A = 2K \frac{dc}{dz}$ und daraus $dz = 2 \frac{K}{H} \frac{dc}{CC'}$. Integration ergibt die Länge des Trennspaltes

$$z = 2 \frac{K}{H} \int_c^{C_E} \frac{dc}{CC'} = 2 \frac{K}{H} \cdot \ln \frac{C_E C'}{C' C} \quad (29)$$

4. Die Plattenfläche ist dann

$$F = \int_0^z y dz = \frac{2}{h x^3} \frac{2K}{H} \cdot s \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc \quad (30)$$

Damit ist die Rohrgeometrie x, y, z, F als Funktion von c_A, c_E, s in Form einer c -Parameterdarstellung festgelegt.

5. Der minimale Wärmestrom ergibt sich zu

$$\dot{Q} = \lambda \Delta T \frac{F}{x} = \lambda \Delta T \frac{4}{h x^4} \frac{K_A}{H} \cdot s \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc = \frac{\lambda}{\alpha^2 D_g} \frac{\bar{T}^2}{\Delta T} \cdot 8s \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc. \quad (31)$$

Er ist unabhängig vom Trenndruck p , da die gaskinetischen Größen α und $\frac{\lambda}{D_g}$ druckunabhängig sind⁺⁾ .

Das konzentrationsabhängige Integral

$$W = s \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc \equiv (2c_E - 1) \ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A} - (2c_A - 1) \frac{c_E - c_A}{c_A c'_A}$$

ist als Funktion von c_A, c_E in Abb. 20 graphisch dargestellt.

$W(c_A, c_E)$ hat folgende Eigenschaften:

- W ist die integrale energetische Formulierung der differentiellen Transportbedingung (26) $\frac{\bar{T}}{c_A} = \frac{1}{2}$.
- W ist invariant gegenüber der Richtung des Trennprozesses: $W(c_A, c_E) = W(c'_A, c'_E)$ d.h. Anreicherung und Abreicherung sind im Aufwand gleichwertig.
- W wird für die Grenzwerte der Konzentration singulär: $W(0, 1) = W(1, 0) \rightarrow \infty$; eine vollkommene Trennung ist demnach unmöglich.

⁺⁾ $\frac{\lambda}{D_g}$ ist druckunabhängig, solange die mittlere freie Weglänge klein gegen die Spaltweite x ist. Der Ausdruck für $\dot{Q}$ nach Alexander[2] unterscheidet sich vom obigen Wert um einen kleinen Zahlenfaktor. Dieser Unterschied beruht auf etwas verschiedenen Zahlenfaktoren in den Ausdrücken H, K_k durch Einführung des gemittelten Geschwindigkeitsprofils in 4.5 (4) (5).

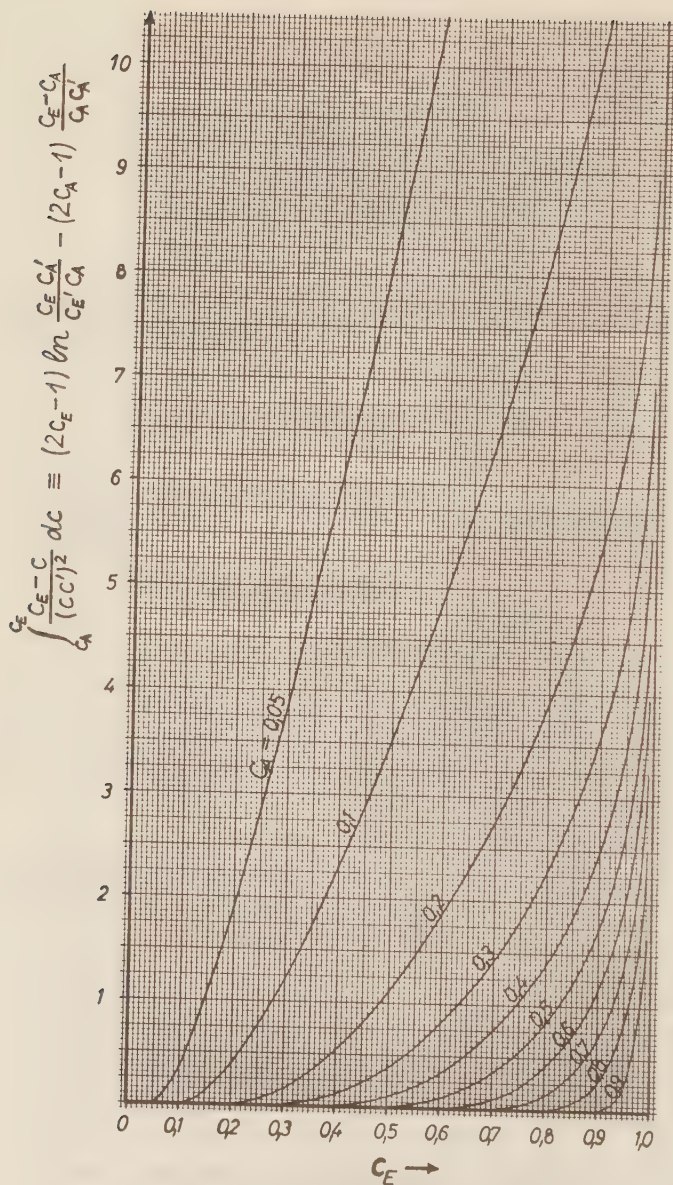


Abb. 20 : Die minimale Heizleistung ($\sim$ Wertfunktion $\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc$) für seitlich randlose Trennplatten als Funktion der Entnahmekonzentration c_E . Parameter c_A .

Das Integral $W(c_A, c_E) = \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc$ gibt die Konzentrationsabhängigkeit des mindestnotwendigen Energieverbrauchs an. Es normiert damit den Herstellungswert eines Trennprodukts von der Anfangskonzentration c_A bis zur Endkonzentration c_E .

Peierls und Dirac [63][31] erkannten 1940/42 in einer allgemeinen Theorie der Trennkaskaden die fundamentale Bedeutung der universellen Funktion $W(c_A, c_E)$ und nannten sie daher "Wertfunktion".

In einer idealen Kaskade ist der Gesamtwert, den der kontinuierliche Isotopenstrom zwischen Anfang und Ende der Kaskade erhält, gleich der Summe der in den Einzel-Trennelementen erzeugten Wertbeiträge. Es geht also kein durch Trennung erzeugter Wert durch ungeeignete Schaltung der Isotopenströme oder innere Mischungsverluste (Rückdiffusion) verloren. Dieses Schaltungsschema ist unter allen Möglichkeiten der Transportführung dadurch ausgezeichnet, daß es bei vorgegebener Produktionsrate den geringsten Leistungsbedarf erfordert.

18. Wirkungsgrad optimaler Plattenkaskaden

Aus dem minimalen Leistungsverbrauch $\dot{Q}$ (31) optimaler Plattenkaskaden läßt sich der höchstmögliche Wirkungsgrad $\eta_{th} = \frac{|\dot{A}|}{\dot{Q} + |\dot{A}|}$ bei der Thermodiffusionstrennung berechnen:

Die reversible Entmischungsarbeit/Zeit (12) $|\dot{A}| = RT \cdot \frac{1}{M} \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc$ bewegt sich in der Größenordnung $RT \frac{S}{M}$, da das Integral nach Abb. 15 im Mittel von der Größenordnung 1 ist.

Der irreversible Wärmestrom $\dot{Q} = \frac{\lambda}{\tau^2 \alpha^2 D \varrho} \frac{\tau^2}{\Delta T} \cdot 84 \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc$ bewegt sich in der Größenordnung $\frac{\lambda}{\alpha^2 D \varrho} \frac{1}{\Delta T} \cdot 84$, da das Integral nach Abb. 20 im Mittel von der Größenordnung 1 ist.

Der Ausdruck $\frac{\lambda}{D \varrho}$ ist für alle Gasmodelle in 1. Näherung universell konstant [80] gleich $5R$, also in der Größenordnung der universellen Gaskonstanten R .

Den entscheidenden Ausschlag gibt der Thermodiffusionsfaktor α . Er liegt für isotope Gase [77] etwa in der Größenordnung 10^{-2} .

Der irreversible Wärmestrom $\dot{Q}$ ist also um viele Zehnerpotenzen größer als die reversible Trennleistung $\dot{A}$.

Damit vereinfacht sich der Wirkungsgrad optimaler Plattenkaskaden auf den Ausdruck

$$\eta_{th} = \frac{|\dot{A}|}{\dot{Q}} = \left[\alpha^2 \frac{Dg}{8\lambda} \frac{R}{M} \frac{\Delta T}{T} \right] \cdot \frac{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc}{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc} \quad (32)$$

$$= \alpha \eta_g \cdot \eta_c$$

Er enthält zwei Anteile:

Der Anteil η_g wird durch gaskinetische Größen bestimmt. Er ist unabhängig vom Trenndruck $p \sim g$ (da α und $\frac{Dg}{\lambda}$ druckunabhängig sind) und unabhängig von der Produktionsrate s (also von der Größe der Anlage).

Der Anteil η_c gibt die Konzentrationsabhängigkeit des maximalen Wirkungsgrades optimaler Plattenkaskaden an. Der Quotient der beiden Integrale ist als Funktion der Anfangskonzentration c_A und Endkonzentration c_E in Abb. 21 graphisch dargestellt. Dieses Extremalfeld $\eta_c(c_A, c_E)$ hat folgende Eigenschaften:

1. Bei sehr schwacher Anreicherung $c_E = c_A + dc$ ist stets $\lim_{c_E \rightarrow c_A} \eta_c = c_A c_A'$: Die Anfangspunkte der Kurvenschar η_c liegen alle auf der (gestrichelten) Kurve $c_A c_A'$.
2. Bei vollständiger Trennung $c_E = 1$ ist stets $\lim_{c_E \rightarrow 1} \eta_c = 0$: Die Endpunkte der Kurvenschar η_c liegen alle im rechten Nullpunkt des Extremalfeldes.
3. Bei vorgegebener Anfangskonzentration c_A besitzt jeder Kurvenzug, der die optimalen Werte als Funktion von c_E darstellt, ein Maximum. Es liegt für $c_A \leq 0,5$ bei $c_E = c_A'$, für $c_A \geq 0,5$ bei $c_E = c_A$.

4. Das absolute Maximum aller Optimalwerte liegt bei $c_A = 0,5$, $c_E = 0,5 + dc$ und hat den Betrag $\frac{1}{4}$.
5. Das Wegkommen von kleinen Anfangskonzentrationen c_A kostet relativ sehr viel mehr Energie als das Erreichen hoher Endkonzentrationen c_E .

Die allgemeine Abschätzung des Wirkungsgrades von Thermodiffusions-Trennrohren ergibt die obere Schranke

$$\eta_{th} < \frac{\alpha^2}{100}.$$

Der meist sehr kleine Thermodiffusionsfaktor α bedingt einen nur sehr geringen Elementartrennfaktor. Daher sind meist große Rohrlängen erforderlich. Infolgedessen muß ständig ein erheblicher Trenngasballast durch die Rohre zirkulieren. Die Wärmeleitung dieses Gasballastes erfordert einen erheblichen Wärmestrom. Dadurch erhält der Thermodiffusionsfaktor α einen dominierenden Einfluß. Der Wirkungsgrad ist demzufolge sehr gering. Er liegt etwa in der Größenordnung 10^{-6} oder darunter.

Beim idealisierten Modellfall des "reversiblen Trennrohrs" (Kap.10) würde der Wirkungsgrad den Idealwert

$$\eta_{th} = \frac{|\dot{A}|}{|\dot{A}|} = 1$$

erreichen.

Bei einer reibungslosen Trennzentrifuge treten nur geringe Verluste zur Aufrechterhaltung der Gegenstromkonvektion auf. Man kann daher einen wesentlich höheren Wirkungsgrad erzielen als beim irreversiblen Trennrohr - theoretisch nahezu den Höchstbetrag [53]. Für reversible Trennverfahren gibt es also keine physikalisch-prinzipielle obere Schranke, sondern nur eine technisch-konstruktive obere Grenze [49].

Der geringe Wirkungsgrad des irreversiblen Trennrohrs beruht dagegen nicht auf konstruktionsbedingten technischen Unvollkommenheiten, sondern ist physikalischer Natur. Infolge der Irreversibilität des Thermodiffusionseffektes kann die obere Schranke $\eta_{th} < \alpha^2/100$ prinzipiell nicht überschritten werden.

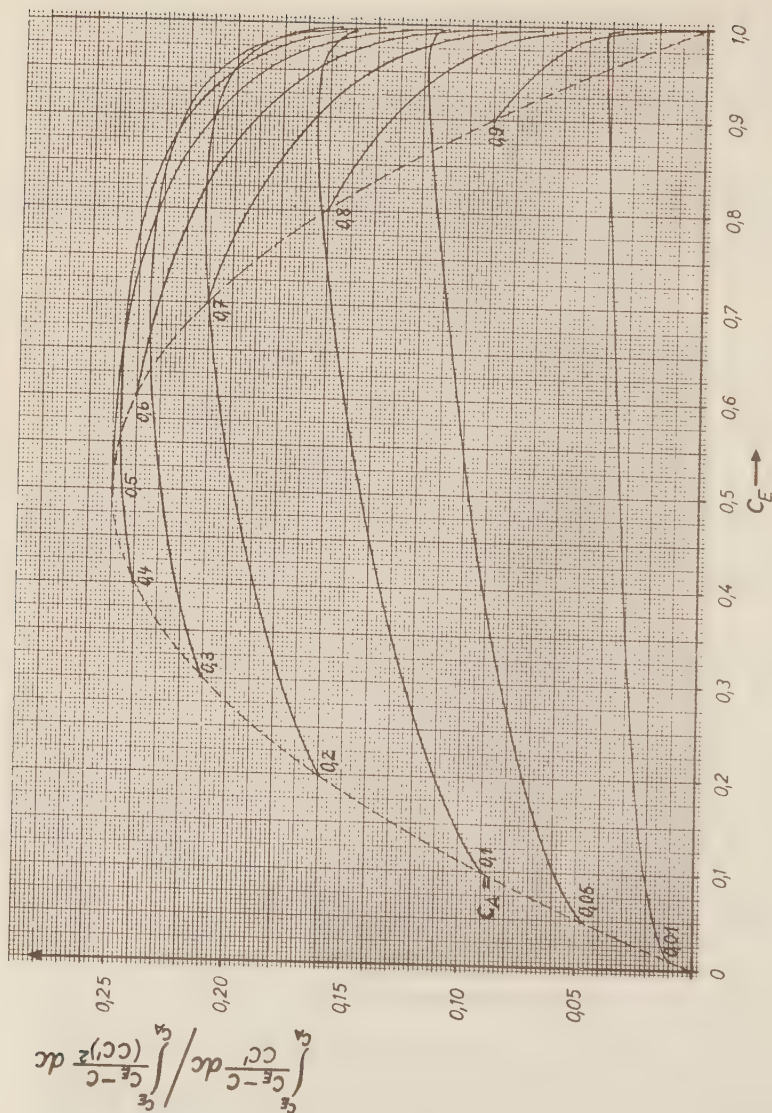


Abb. 21 : Der optimale Wirkungsgrad $\eta_{\text{opt}} \sim \int_{c_0}^{c_E} \frac{c_E - c}{c c^2} dc$ für seitlich
 rendlose Trennplatten als Funktion der Entnahmekonzentration c_E . Parameter c_A .

19. Zylindrische Optimierung

Nach der relativ einfachen Behandlung des idealisierten (seitlich randlosen) planparallelen Plattenpaares untersuchen wir den realistischen Fall des Zylinderrohrs.

Beim Zylinderrohr ist der differentielle Wärmestrom (22)

$$d\dot{Q} = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} dz = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{K_k + K_d}{H c c' - s(c_E - c)} dc$$

Die Transportfaktoren sind Funktionen der Rohrradien R_a, R_i in folgenden Kombinationen (4)(5)(6)(Kap.16):

$$H = (R_a - R_i)^3 \cdot \pi (R_a + R_i) \cdot h \cdot \varphi\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$$

$$K_k = (R_a - R_i)^2 \cdot \pi (R_a + R_i) \cdot k_k \cdot \psi\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$$

$$K_d = (R_a - R_i) \cdot \pi (R_a + R_i) \cdot k_d \cdot \chi\left(\frac{R_a}{R_i}\right).$$

In dieser Darstellung treten d r e i Variable $(R_a - R_i), (R_a + R_i), \frac{R_a}{R_i}$ auf. Eine dieser Variablen hat man also durch die beiden anderen auszudrücken, da die Geometrie jedes Trennelements nach Abb.19 bereits durch z w e i Angaben vollständig und eindeutig bestimmt ist. Als mathematisch einfachster Weg erweist sich die Substitution

$$(R_a + R_i) \equiv (R_a - R_i) \cdot \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1}.$$

Man erhält so den Zusammenhang

$$H = (R_a - R_i)^4 \cdot h \cdot \left[\varphi\left(\frac{R_a}{R_i}\right) \cdot \pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1} \right] \quad (33)$$

$$K_k = (R_a - R_i)^3 \cdot k_k \cdot \left[\psi\left(\frac{R_a}{R_i}\right) \cdot \pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1} \right] \quad (34)$$

$$K_d = (R_a - R_i)^2 \cdot k_d \cdot \left[\chi\left(\frac{R_a}{R_i}\right) \cdot \pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1} \right]. \quad (35)$$

Der Energieverbrauch hängt dann geometrisch nur noch von den beiden Variablen $(R_a - R_i)$, $\frac{R_a}{R_i}$ ab⁺).

Das Variationsproblem lautet dann

$$d\dot{Q} = \min$$

$$sc_E = \text{const}$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial(R_a - R_i)} d\dot{Q} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial(\frac{R_a}{R_i})} d\dot{Q} = 0.$$

Mit diesen Variablen $(R_a - R_i)$, $\frac{R_a}{R_i}$ wurde die Optimierung erstmals von David [17](1953) in Angriff genommen. Es ergibt sich damit folgende Fragestellung:

Wie muß man die Trennspaltweite $(R_a - R_i)$ und das Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ entlang der Rohrlänge z wählen, um eine geforderte Produktionsrate s mit gegebener Endkonzentration c_E bei minimalem Leistungsverbrauch $\dot{Q}$ zu gewinnen?

⁺) Dieselbe Wahl der Variablen trafen Martin und Kuhn [55](1941) bei der Optimierung der Gegenstromzentrifuge. Hier liegen - methodisch gesehen - dieselben Kaskadierungsvorgänge wie beim Trennrohr vor. In beiden Fällen wird die Vervielfachung des radialen Elementareffekts nach demselben Prinzip durchgeführt. Dies äußert sich mathematisch in einer formalen Gleichheit der Transportgleichungen, wenn man den radialen Druckgradienten der Zentrifuge durch den radialen Temperaturgradienten des Trennrohrs ersetzt. Bei der Zentrifugentheorie fängt man dabei aber gleich mit Zylinderkoordinaten an, weil es keine planparallele Zentrifuge gibt.

Die Bedingungsgleichungen lauten explizit

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial(R_a - R_i)} \left(\frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{K_k + K_d}{Hcc' - s(C_E - c)} \right) = 0 \quad (36)$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial \left(\frac{R_a}{R_i} \right)} \left(\frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{K_k + K_d}{Hcc' - s(C_E - c)} \right) = 0. \quad (37)$$

Wir untersuchen die Lösungen:

1. Die erste Gleichung liefert die Optimalbedingung

$$\frac{s(C_E - c)}{Hcc'} = \frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{4 \frac{K_k}{K_d} + 1} \right]. \quad (38)$$

Zur Diskussion dieses Ergebnisses normieren wir die Variablen $(R_a - R_i)$ dimensionslos: Wir dividieren sie durch den kleinsten Wandabstand, der in der optimalen Zylinderkaskade überhaupt auftritt. Diesen Minimalabstand $(R_a - R_i)_{\min} = R_0$ findet man leicht aus (38). Er liegt stets an der Stelle $\tau = 0$, also am Entnahmeende des kontinuierlich betriebenen Rohres. Er läßt sich aus $\frac{K_k}{K_d} = \frac{1}{2}$ quantitativ berechnen. Es ergibt sich gerade derjenige Spaltabstand (11)

$$(R_a - R_i)_{\min} = R_0 = \sqrt[3]{3 \cdot 2^7 \frac{D\eta}{g\theta} \frac{T}{\Delta T}}$$

der auch beim Problem der maximalen Trennschärfe in Kap. 9, Punkt 3 auftritt. Die neu einzuführende dimensionslose Variable des Wandabstandes

$$\xi = \frac{R_a - R_i}{R_0} \quad (39)$$

erweist sich bei der allgemeinen Behandlung der Zylinderkaskade als zweckmäßig. Der Verlauf (38) des reduzierten Transportes $\frac{T}{\tau_A}$ als Funktion der reduzierten Trennspaltweite folgt dann (wegen $\frac{K_k}{K_d} = \frac{\xi^6}{2}$) aus der Gleichung

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{2\xi^6 + 1} \right]. \quad (40)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 22 graphisch dargestellt.

Die differentielle energetische Optimalbedingung der Zylinderkaskade lautet:

An jeder Stelle c des Rohres ist die reduzierte Spaltweite ξ so zu wählen, daß der Transport $\tau = s(c_E - c)$ und der an dieser Stelle c auftretende Anfangstransport $\tau_A = H(\xi)cc'$ als Funktion von ξ den obigen Verlauf hat. Dann ist der Energieverbrauch der Trennkaskade (bezüglich der Rohrweite $R_a - R_1$) minimal.

Den Variationsbereich der reduzierten Spaltweite ξ unterteilen wir nach seinen physikalischen Eigenschaften in drei verschiedene Intervalle (Abb.22):

- a) Für $0 \leq \xi \leq 1$ kommt man in ein Gebiet negativen Transports: Der Isotopenstrom τ wäre dem Entnahmestrom s entgegengerichtet. Der Grund ist das Überhandnehmen der Rückdiffusion gegenüber der Konvektion. Dieses Gebiet bleibt als formale Lösung ohne praktische Bedeutung; man arbeitet nur mit positivem Transport $\tau = s(c_E - c) \geq 0$. Im Grenzfall $\xi = 1$ ist $\tau = 0$, also $c = c_E$ (Endkonzentration am Entnahmeende).
- b) Für $2 < \xi < \infty$ kommt man in ein Gebiet, in dem der reduzierte Transport $\frac{\tau}{\tau_A} \approx \frac{1}{2} = \text{const}$ bleibt. Die Trennspaltweite ist dann bereits so groß, daß das Rückdiffusionsglied K_d gegenüber dem Rückkonvektionsglied K_k vernachlässigbar klein wird. Obwohl dieses Gebiet damit durch eine übersichtliche Einfachheit ausgezeichnet ist, muß man diesen ξ -Bereich meiden, da der bei $\xi \approx 2$ beginnende Turbulenzeinsatz⁺⁾ die Berechenbarkeit der Trennrohre nach der bisherigen Theorie ausschließt.
- c) Für $1 \leq \xi \leq 2$ hat man ein Intervall, das für den Kaskadenbau verwendbar ist. Die praktische Trennspaltweite wird damit durch eine untere Grenze (Rückdiffusion) und eine obere Grenze (Turbulenz) eingeschränkt.
Am Entnahmeende jedes Trennrohres ist stets $\tau = 0$ und damit $\xi = 1$. Zum Einspeisende hin wächst der Transport $\tau > 0$ an und damit auch die reduzierte Trennspaltweite $\xi \geq 1$.

⁺⁾ Näheres siehe Kap.22

Demnach bleibt die Trennspaltweite längs einer energetisch optimalen Anlage nicht konstant^{*)}, sondern ist eine Funktion des Transportverlaufs.

2. Aus der zweiten Bedingungsgleichung (37), die das optimale Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ liefern soll, gewinnt man ein bemerkenswert einfaches Resultat: Das Minimum der Heizleistung ist nahezu unabhängig vom Radienverhältnis des Kühl- und Heizmantels.

Man sieht dies ein, wenn man die geometrische Abhängigkeit der Heizleistung (22) $d\dot{Q}$ auf die unabhängige Variable umrechnet und dabei die Lösung von Punkt 1 in Form ihrer 1. Näherung $\frac{\tau}{\tau_a} \approx \frac{1}{2}$ berücksichtigt:

$$\text{Mit } \frac{\tau}{\tau_a} = \frac{1(C_E - C)}{Hcc'} = \frac{1(C_E - C)}{(R_a - R_i)^4 h \varphi \left(\frac{R_a}{R_i}\right) \pi \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1}} \approx \frac{1}{2}, \quad K_d \approx 0$$

ergibt sich für den minimalen Wärmestrom

$$\begin{aligned} d\dot{Q} &\approx \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{K_k}{\frac{1}{2} Hcc'} dc = \lambda \Delta T \frac{4\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{k_k \psi}{h \varphi} (R_a - R_i)^4 \frac{dc}{cc'} \approx \\ &\approx \left\{ \left[\frac{2}{\ln \frac{R_a}{R_i} \left(\frac{R_a}{R_i} + 1 \right)} \cdot \frac{\psi \left(\frac{R_a}{R_i} \right)}{\varphi^2 \left(\frac{R_a}{R_i} \right)} \right] \cdot \left(\frac{k_k}{h^2} 4 \lambda \Delta T \right) \right\} \cdot \frac{C_E - C}{(cc')^2} dc. \end{aligned}$$

Zur Diskussion stellen wir den geschweiften Klammerausdruck als Funktion der Variablen $\frac{R_a}{R_i}$ in Abb. 23 graphisch dar:

- a) Für den Grenzfall $\frac{R_a}{R_i} = 1$ (planparalleles Plattenpaar) wird der eckige Klammerausdruck gleich 1, in Übereinstimmung mit der Rechnung für das Plattenpaar (Kap. 17, Punkt 5).
- b) Für $\frac{R_a}{R_i} > 1$ ändert sich der Klammerausdruck nur sehr langsam. Der monoton fallende Verlauf von $\frac{2}{\ln \frac{R_a}{R_i} \left(\frac{R_a}{R_i} + 1 \right)}$ wird durch die Formfaktoren ψ/φ^2 modifiziert. Jones u. Furry [50] berücksichtigten bei der Berechnung des Wärmestroms in Zylinderrohren auch noch die $\frac{R_a}{R_i}$ -Abhängigkeit der Mittelwerte von $\bar{\tau}, \bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\eta}, \bar{D}$. Dieser Einfluß ist in der runden Klammer zusammengefaßt. Die numerischen Integrationen

^{*)} Nur im Grenzfall entnahmefreier Trennung ($\delta = 0, \tau \approx 0, \xi \approx 1$) bleibt die Spaltweite längs des Rohres konstant.

von Jones und Furry für ein Maxwell-Gas ($\lambda \sim T$, $\eta \sim T$, $D \sim T^2$, $\alpha = \text{const}$) ergeben (S.201, Tab.XVI): "Die vielleicht interessanteste Eigenschaft dieser Resultate ... ist die Tatsache, daß sich die Größen kaum ändern". Der geschweifte Klammerausdruck variiert im gesamten Intervall $1 \leq \frac{R_a}{R_i} \leq 100$ nur so wenig, daß er höchstens um einige Prozente vom horizontalen Verlauf abweicht. Es bildet sich nur ein sehr flaches Minimum aus.

Der für den Kaskadenbau verwertbare Bereich des Radienverhältnisses kann also im ganzen Intervall

$$1 \leq \frac{R_a}{R_i} \leq 100 \quad (41)$$

nach Bedarf gewählt werden. Man kann nahezu jeden Wert zur optimalen Trennung verwenden.

- c) Die "Optimalbedingung" (41) für $\frac{R_a}{R_i}$ gilt nur für $\frac{\tau}{\tau_A} \approx \frac{1}{2}$, also für $\xi > 1,3$. Entsprechende Überlegungen für $\frac{\tau}{\tau_A} \rightarrow 0$, also $\xi \rightarrow 1$, ergeben wegen der komplizierten R_a/R_1 -Abhängigkeit für die verschiedenen Molekülmodelle keine exakte⁺⁾ Bauvorschrift in formelmäßig geschlossener Form[17]. Im allgemeinen erweisen sich große Werte von R_a/R_1 (wegen des überwiegenden Faktors $\frac{1}{\ln R_a/R_i}$) als zweckmäßig.

Diese einfachen Ergebnisse sind die nachträgliche Rechtfertigung für die Wahl der beiden Variablen $(R_a - R_1)$, $\frac{R_a}{R_i}$ zur geometrischen Beschreibung der optimalen Zylinderrohr-Kaskaden: Die eine Variable $\frac{R_a}{R_i}$ bleibt im größeren Teil der Anlage ($\xi > 1,3$) nahezu ohne Einfluß, die andere Variable $(R_a - R_1)$ wirkt sich sehr empfindlich aus.

⁺⁾ Die Optimalbedingung für die Spaltweite $(R_a - R_1)$ gilt dagegen für alle Molekülmodelle exakt.

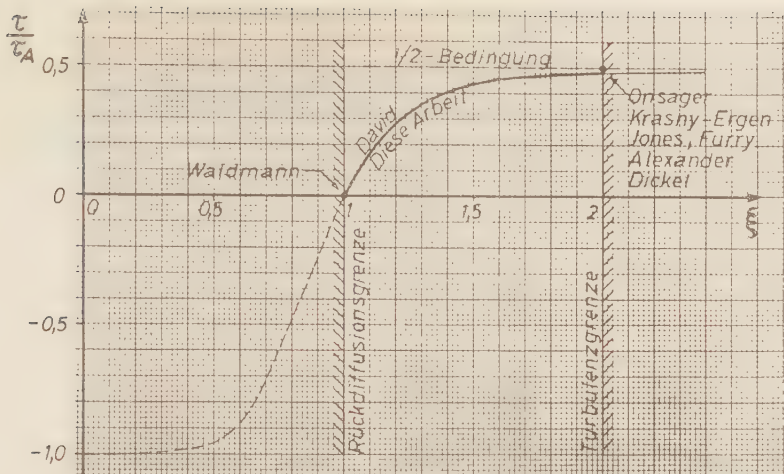


Abb.22 : Das optimale Transportverhältnis $\frac{\tau}{\tau_A}$ als Funktion der reduzierten Trennspaltweite ξ : $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2\xi^6 + 1} \right)$. In erster Näherung ist $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$.

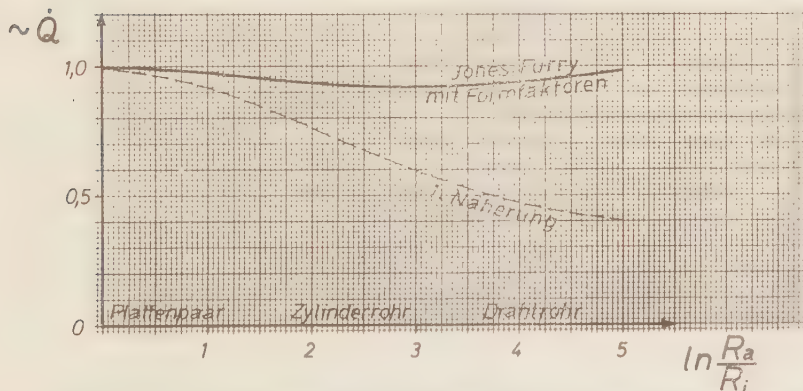


Abb.23 : Die Mindestheizleistung $\dot{Q}$ als Funktion des Radienverhältnisses R_a/R_i für den Fall $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$.

In erster Näherung ist $\dot{Q} \sim \frac{2}{\ln R_a/R_i} \frac{R_a/R_i - 1}{R_a/P_i + 1}$ (gestrichelt).

In höherer Näherung wird der Leistungsverbrauch infolge der Formfaktoren nahezu unabhängig vom Radienverhältnis.

Beispiel nach Jones und Furry [50] für ein Maxwell-Gas mit $T_1/T_a = 3$ (ausgezogen).

20. Energetisch optimale Zylindergeometrie

Zur Berechnung des geometrischen Aufbaus der Zylinderkaskaden normieren wir zunächst die gesuchten Kaskadenmaße x, y, z zu dimensionslosen Größen. Die Darstellung gewinnt dann wesentlich an Übersichtlichkeit.

Hierzu führen wir folgende B e z e i c h n u n g e n ein:

$$\xi = \frac{x}{R_0}$$

$$\eta = \frac{y}{R_0}$$

$$\zeta = \frac{z}{L_0}$$

Handliche P a r a m e t e r fassen die komplizierten Einzelabhängigkeiten zusammen:

$$R_0 = \sqrt[3]{3 \cdot 2^7 \frac{D\eta}{g^2} \frac{\bar{T}}{\Delta T}}$$

$$L_0 = R_0^4 \frac{k\psi}{h\varphi}$$

$$s_0 = R_0^4 h\varphi\pi P$$

$$P = \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1}.$$

Es gelten dann folgende einfache B e z i e h u n g e n:

$$H = s_0 \cdot \xi^4$$

$$K_k = s_0 L_0 \cdot \xi^8$$

$$K_d \approx s_0 L_0 \cdot 2 \xi^2.$$

Zusätzlich werden dimensionslose H i l f s p a r a m e t e r definiert:

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma s_0}$$

$$\Sigma = 2\sigma \frac{C_E - C}{C C'}.$$

Die gesuchten Kaskadenfunktionen $x, y, z, \dot{Q}$ ergeben sich aus der differentiellen Minimalbedingung(40)

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2\xi^6 + 1} \right)$$

in Form einer Parameterdarstellung:

1. Um den reduzierten Spaltabstand

$\xi = \frac{x}{R_0} = \frac{R_a - R_i}{R_0}$ zu gewinnen, formt man den optimalen reduzierten Transport $\frac{\tau}{\tau_A}$ nach den neuen Bezeichnungen um in eine Σ -Darstellung:

$$\Sigma(\xi) = \xi^4 \left(1 - \frac{3}{2\xi^6 + 1} \right). \quad (42)$$

Damit hat man das gesuchte ξ implizit gefunden. Um es explizit angeben zu können, hat man die Umkehrfunktion von $\Sigma(\xi)$ aufzusuchen. Die ξ -Darstellung ergibt die sehr gute Näherung⁺)

$$\xi(\Sigma) = \sqrt[4]{\Sigma + \frac{1}{1 + \Sigma}}. \quad (43)$$

Die optimale reduzierte Trennsplattweite ξ ist in Abb. 24 als Funktion von Σ dargestellt. Damit hat man eine c, c_E, σ -Parameterdarstellung der Trennsplattweite gewonnen.

2. Den reduzierten mittleren Rohrrumfang $\eta = \frac{y}{R_0} = \pi \frac{R_a + R_i}{R_0}$ erhält man dann aus dem Zusammenhang von Kap. 16 und Abb. 19, wenn man in $P = \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1}$ das gewählte Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ einsetzt:

$$\eta = \xi \pi P. \quad (44)$$

Der mittlere Rohrrumfang läßt sich also ebenfalls aus Abb. 24 in c, c_E, σ -Parameterdarstellung gewinnen.

3. Für die reduzierte Rohrlänge $\zeta = \frac{z}{L_0}$ findet man mit Hilfe der Transportgleichung (3) durch Integration über die Rohrlänge z :

$$z = \int_c^{c_E} \frac{K_k + K_d}{\tau_A - \tau} dc.$$

Die explizite Berechnung dieses Integrals bereitet einige Schwierigkeiten; wir lösen es daher in zwei Schritten:

⁺) Die maximale relative Abweichung dieser Näherung von der exakten Lösung beträgt $\Delta\xi/\xi < 0,4\%$ bei gleichem Σ .

Im ersten Schritt transformieren wir den Integranden zunächst in eine ξ -Darstellung. Da sich der Integrationsweg aber über den Konzentrationsverlauf c längs der Kaskade erstreckt, übersetzen wir im zweiten Schritt die ξ -Darstellung in eine Σ -Darstellung mit Hilfe der aus (43) bekannten Umkehrfunktion $\xi(\Sigma)$. Da $\Sigma = 26 \frac{c_E - c}{cc'}$ eine bekannte Funktion der laufenden Konzentration c ist, läßt sich dann die eigentliche Integration durchführen.

1. Schritt: ξ -Darstellung.

Für den Zähler des Integranden ergibt sich $K_R + K_d = \lambda_0 L_0 (\xi^8 + 2\xi^2)$. Für den Nenner des Integranden erhalten wir mittels der Optimalbedingung (40) die Umformung

$$\tau_A - \tau = \tau_A \left(1 - \frac{\tau}{\tau_A}\right) = \frac{1}{2} \lambda_0 \xi^4 \left(1 - \frac{3}{2\xi^{6+1}}\right) cc'.$$

Damit lautet der Integrand als Funktion von ξ

$$\left[\frac{2(\xi^8 + 2\xi^2)}{\xi^4 \left(1 - \frac{3}{2\xi^{6+1}}\right)} \right] \frac{L_0}{cc'}.$$

2. Schritt: Σ -Darstellung.

Die Transformation $\xi \rightarrow \Sigma$ läßt sich mittels der Umkehrfunktion $\xi(\Sigma)$ vornehmen. Für große ξ -Werte konvergiert der eckige Klammerausdruck dabei gegen 2Σ . Da wir uns aber auf das nutzbare Intervall $1 \leq \xi \leq 2$ beschränken müssen, tritt noch ein positives Zusatzglied $E(\Sigma)$ hinzu. David[17] machte den Ansatz

$$\frac{2(\xi^8 + 2\xi^2)}{\xi^4 \left(1 - \frac{3}{2\xi^{6+1}}\right)} =_{\approx} 2\Sigma + E(\Sigma).$$

Er fand für die Zusatzfunktion $E(\Sigma)$ als gute Näherung

$$E(\Sigma) \approx \frac{3}{1 + \frac{\Sigma}{6}}.$$

Sie ist in Abb. 25 graphisch dargestellt.

Die gesuchte reduzierte Rohrlänge ist damit

(45)

$$\varphi = \frac{Z}{L_0} = \int_c^{c_E} (2\Sigma + E(\Sigma)) \frac{dc}{cc'} \approx 46 \int_c^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + 3 \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{c}{3}(c_E - c)}.$$

Die beiden Integrale lassen sich in geschlossener Form angeben:

a) Das erste Integral ist die aus Kap.17 bekannte "Wertfunktion".

b) Das zweite Integral (45)

$$\int_c^{c_E} E(\Sigma) \frac{dc}{cc'} \approx 3 \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{c}{3}(c_E - c)} = \frac{3}{2B} \ln \frac{(c_E - D + B)(c - D - B)}{(c_E - D - B)(c - D + B)}$$

mit $B = \sqrt{D^2 + \frac{5}{3}c_E}$, $D = \frac{1}{2}(1 - \frac{c}{3})$

beschreibt den Einfluß der Rückdiffusion in Abhängigkeit von c, c_E, σ : Setzt man versuchsweise das Rückdiffusionsglied $K_d = 0$, so verschwindet die Funktion E identisch. Wir nennen das Integral⁺⁾ daher die "Rückdiffusionsfunktion".

Wir schätzen das Größenverhältnis der Wertfunktion und der Rückdiffusionsfunktion gegeneinander ab:

α . Im Grenzfall $\sigma = 0$ (entnahmefreier Fall) verschwindet der Beitrag der Wertfunktion. Der Beitrag der Rückdiffusionsfunktion liefert die Lösung $\mathcal{Y} = 3 \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc'} = 3 \ln \frac{c_E c'}{c c'}$.

β . Im Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ (Großanlagen) ist der Beitrag der Wertfunktion groß gegen den Beitrag der Rückdiffusionsfunktion. Man erhält die Lösung $\mathcal{Y} = 4\sigma \int_c^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc$.

γ . Im praktisch wichtigen Fall $0 \leq \sigma < 4$ (Laboranlagen) läßt sich die erforderliche Rohrlänge aus der Wertfunktion (Abb. 20) und aus der Rückdiffusionsfunktion durch graphisch-numerische Mittelung des Integrals

$$\int_c^{c_E} E(\Sigma) \frac{dc}{cc'} \approx \frac{\int E(\Sigma) d\Sigma}{\Sigma} \cdot \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc'} = \bar{E}(\Sigma) \cdot \ln \frac{c_E c'}{c c'} \quad (46)$$

nach Abb. 13 und Abb. 26 sofort näherungsweise⁺⁺⁾ gewinnen.

⁺⁾ Vgl. das Integral Kap. 7, Punkt 4

⁺⁺⁾ Die Näherung wird für $\Sigma < 4$ sehr gut, für $\Sigma = 0$ exakt.

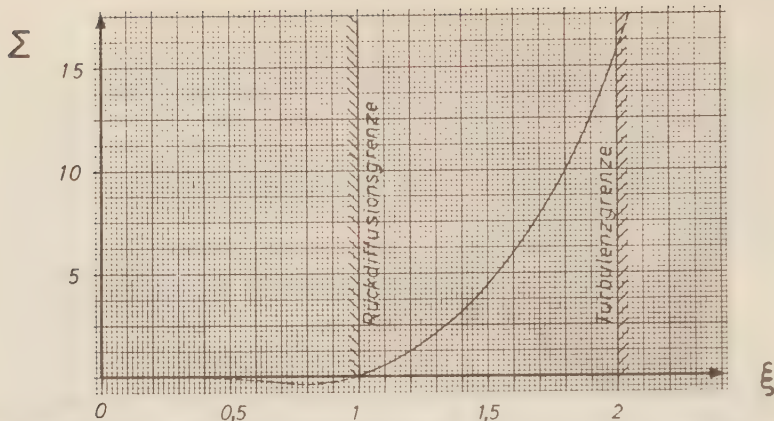


Abb.24 : Der Transportparameter Σ als Funktion der reduzierten Trennsplattweite ξ : $\Sigma = \xi^4 \left(1 - \frac{3}{2\xi^6 + 1}\right)$ bzw. $\xi = \sqrt[4]{\Sigma + \frac{1}{1 + \frac{\Sigma}{9}}}$.

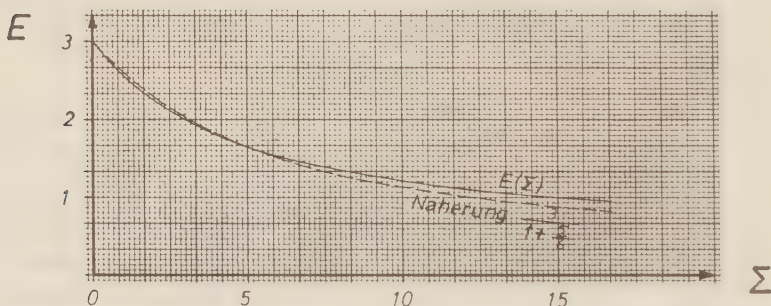


Abb.25 : Die Zusatzfunktion $E(\Sigma)$ und ihre Näherung $\frac{3}{1 + \frac{\Sigma}{6}}$ als Funktion von Σ . (Nach David [17]).

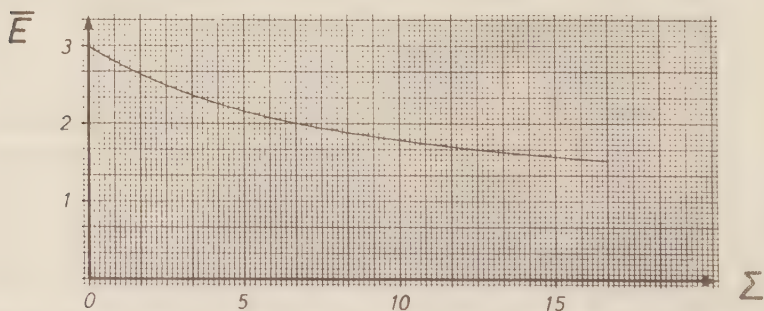


Abb.26 : Zur Berechnung des Rückdiffusionsanteils der Minimalenergie in Abhängigkeit vom Transportparameter Σ : Der Mittelwert $\bar{E}(\Sigma) = \frac{1}{\Sigma} \int_0^\Sigma E(\Sigma) d\Sigma$ als Funktion von Σ .

Für jedes Trennproblem kann man so die Rohrlänge ζ , den mittleren Rohrumfang η sowie den Verlauf der Trennspaltweite ξ als Funktionen des Konzentrationsverlaufs c längs des Rohres in Form reduzierter Größen explizit berechnen. Die Anfangskonzentration c_A , die gewünschte Endkonzentration c_E und die geforderte reduzierte Entnahme σ treten dabei als Parameter auf. Damit ist die optimale Geometrie der Zylinderkaskade bestimmt.

4. Der zugehörige minimale Energieverbrauch der Zylinderkaskade ist (22)

$$\dot{Q} = \lambda \Delta T \int_{c_A}^{c_E} \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{K_k + K_d}{\tau_A - \tau} dc.$$

Er hat die charakteristische Eigenschaft (41), vom Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ nahezu völlig unabhängig zu sein. Im allgemeinen kann daher $\frac{R_a}{R_i}$ längs des Rohres als Funktion von z auftreten. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, jedes Trennproblem mit geometrisch unterschiedlichen Kaskadenmaßen optimal zu lösen.

Am einfachsten wird die Rechnung, wenn man $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$, also unabhängig von z und c wählt. Hierfür bietet sich etwa derjenige $\frac{R_a}{R_i}$ -Wert an, bei dem in Abb. 23 das sehr flache "Minimum" liegt⁺).

⁺) Diese Annahme bedeutet aber keineswegs eine Spezialisierung aller Überlegungen auf den Sonderfall $R_a/R_i = \text{const}$. Sie dient nur als Rechenmethode zur quantitativen Bestimmung der Mindestheizleistung eines vorgegebenen Trennproblems: Da der Energieverbrauch nahezu unabhängig von R_a/R_i ist, machen wir uns diese Eigenschaft zunutze, um ihn anhand des übersichtlichen Sonderfalles $R_a/R_i = \text{const}$ zu berechnen. Er ist dann für alle anderen Rohrformen mit variablem Radienverhältnis nahezu gleich groß. Verschiedene R_a/R_i -Werte ändern dabei im $\dot{Q}$ -Integral (47) den Nenner $\ln \frac{R_a}{R_i} \frac{1}{R_a/R_i + 1}$. Gleichzeitig ändert sich der Wert von σ (da $\sigma = \frac{1}{\lambda_0}$, $\lambda_0 \sim \frac{1}{R_a/R_i + 1}$). Infolgedessen ist die praktische Auswirkung auf $\dot{Q}$ für die üblichen Radienverhältnisse nur gering.

Die Integration läßt sich dann wie in Punkt 3 durchführen:

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \int_{c_A}^{c_E} \frac{K_b + K_d}{\tau_A - \tau} dc = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot Z = \\
 &= \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \int_{c_A}^{c_E} (2\Sigma + E(\Sigma)) \frac{dc}{cc'} = \\
 &= \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \left(4\sigma \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} + 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{\sigma}{3}(c_E - c)} \right). \quad (47)
 \end{aligned}$$

Die Heizleistung besteht aus zwei Gliedern:

- a) Der Anteil der Wertfunktion ist (wie beim Plattenrohr) der reduzierten Entnahme σ proportional.
- b) Der Anteil der Rückdiffusion bedeutet einen zusätzlichen Energieaufwand zur Kompensation der inneren Rückvermischung. Die Längsdiffusion der angereicherten Isotope vom Entnahmeende zum Einspeisende hin ist vom reduzierten Entnahmestrom σ nur schwach abhängig (Abb.26).

Der zweigliedrige Ausdruck (47) für den Energieverbrauch zeigt sehr anschaulich eine innere **A r b e i t s t e i l u n g** im pyramidenförmigen Aufbau der optimalen Zylinderrohr-Kaskade: Die Pyramidenbasis ($\xi \leq 2$) verbraucht vorwiegend den Anteil der Wertfunktion ($\sigma \cdot W$) und arbeitet mit hohem Transport ($\tau_A \sim \xi^4$). Die Pyramidenspitze ($\xi \geq 1$) verbraucht vorwiegend den Anteil der Rückdiffusionsfunktion ($\bar{E} \cdot \ln \frac{c_E}{c_E} \frac{c_A'}{c_A}$) und arbeitet mit höchster Trennschärfe.

Transport und Trennschärfe sind dabei in der Trennpyramide so aufeinander abgestimmt, daß sie sich zu minimaler Heizleistung bei vorgegebener Trennleistung optimal ergänzen.

21. Wirkungsgrad optimaler Zylinderkaskaden

Zur Gastrennung durch Thermodiffusion verwendet man ausschließ-
lich zylindrische Anordnungen [7].

Der Wirkungsgrad optimaler Zylinderkaskaden ist dann nach Kap.12
und Kap.20

$$\eta_{th} = \frac{|\dot{A}|}{\dot{Q}} = \frac{\frac{R\bar{T}}{M} s}{\lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}}} \cdot \frac{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc}{4\sigma \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{\sigma}{3}(c_E - c)}} .$$

Hierbei kürzt sich die Entnahme s bzw. $\sigma = \frac{s}{s_0}$ nicht mehr heraus:
Der Wirkungsgrad einer realistischen optimalen Zylinderkaskade
ist abhängig von der Sollentnahme s , also von der Produktions-
leistung der Anlage.

Im Unterschied zu den optimalen (seitlich randlosen) Platten-
kaskaden nach Kap.18 erhält man jetzt nicht mehr ein zweidimen-
sionales Extremalfeld $\eta_c(c_A, c_E)$ (Abb.21), sondern ein dreidi-
mensionales Feld $\eta_c(c_A, c_E, \sigma)$. Die reduzierte Entnahme $\sigma = \frac{s}{s_0}$
tritt als neue Variable auf.

Am übersichtlichsten stellen sich die Verhältnisse dar, wenn
man die notwendigen Änderungen am zweidimensionalen Extremal-
feld $\eta_c(c_A, c_E)$ der Plattenkaskaden durch einen Faktor $n(c_A, c_E, \sigma)$
berücksichtigt. Dieser Faktor

$$n(c_A, c_E, \sigma) = \frac{\dot{Q}_{plan}}{\dot{Q}_{zyl}}$$

gibt das Verhältnis des Wirkungsgrades einer idealisierten
Plattenkaskade zu dem einer realistischen Zylinderkaskade an,
wenn man für beide Kaskadentypen gleiche Trennleistung (c_A, c_E ,
 $\sigma = \text{const.}$) fordert. Er deckt sich mit dem von Barwich [4]
in die Kaskadentheorie eingeführten Begriff des Nutzungsgra-
des einer "idealen" Kaskade.

Der Wirkungsgrad der Zylinderkaskade ist dann

$$\eta_{th,zyl} = \eta_{th,plan} \cdot n .$$

Es ist daher aufschlußreicher, statt des Wirkungsgrades den Nutzungsgrad n aus (31)(47) zu berechnen:

$$n = \frac{\dot{Q}_{plan}}{\dot{Q}_{xyt}} = \left[\frac{\frac{2\lambda s_0 \bar{T}^2}{\alpha^2 D g \Delta T}}{\lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}}} \right] \frac{46 \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc}{46 \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{5}{3}(c_E - c)}} =$$

$$= \frac{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc}{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + \frac{3}{46} \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{5}{3}(c_E - c)}} \quad (48)$$

Der eckige Klammerausdruck ergibt (definitionsgemäß) den Zahlenwert 1. Wir diskutieren das Verhältnis der Integrale:

$n(c_A, c_E, \bar{\sigma})$ ließe sich am Übersichtlichsten graphisch als dreidimensionale Raumflächen-Schar über einer $c_E, \bar{\sigma}$ -Ebene mit c_A als Scharparameter darstellen. Zur Veranschaulichung begnügen wir uns mit Querschnitten und einem Längsschnitt durch dieses Funktionsgebirge im $c_E, \bar{\sigma}, n$ -Raum.

Die Querschnitte (Abb.27) sind so gewählt, daß sie den praktisch wichtigsten Bereich der Laboranlagen überdecken ($\bar{\sigma} = 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$, Parameter c_A). Der Längsschnitt (Abb.44) stellt n für stetig variables $\bar{\sigma}$ bei konstantem c_A, c_E dar.

Das Extremalfeld $n(c_A, c_E, \bar{\sigma})$ hat folgende Eigenschaften:

1. Die Kurven $n(c_E, c_A)$ schneiden sich für $\bar{\sigma} = \text{const}$ nirgends. Sie steigen monoton mit c_E und fallen monoton mit c_A .
2. Im Grenzfall $\bar{\sigma} \rightarrow 0$ geht der Nutzungsgrad $n \rightarrow 0$, die Kurvenschar verläuft nahezu horizontal.
3. Im Grenzfall $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$ steigt die Kurvenschar nahezu senkrecht von $n = 0$ an und mündet nahezu horizontal in den Grenzwert $n = 1$ ein.
4. Bei sehr schwacher Anreicherung $c_E = c_A + dc$ ist der Nutzungsgrad sehr gering ($n \approx 0$).

Ein Vergleich dieser realistischen Zylinderkaskaden mit den idealisierten Plattenkaskaden ergibt hinsichtlich des optimalen

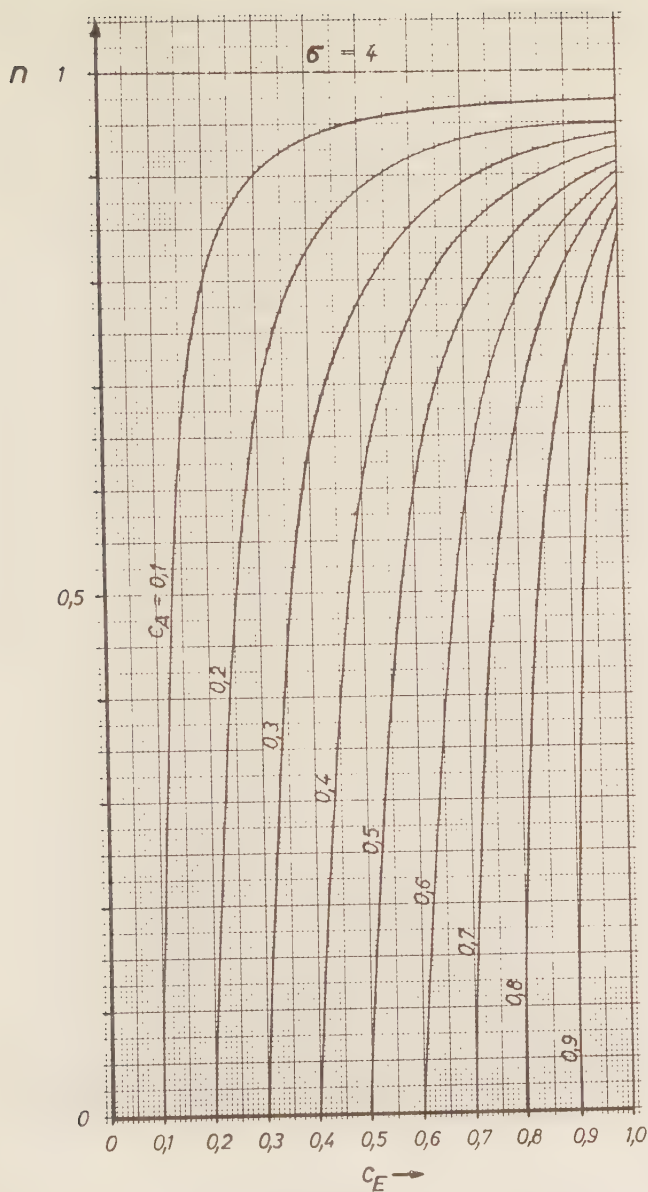
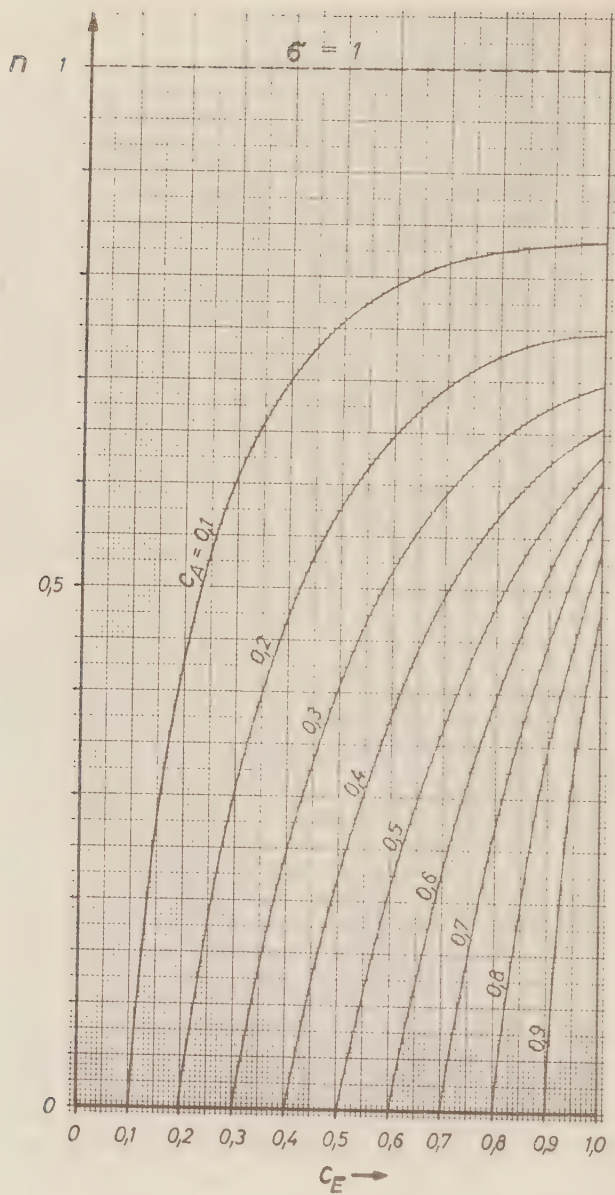
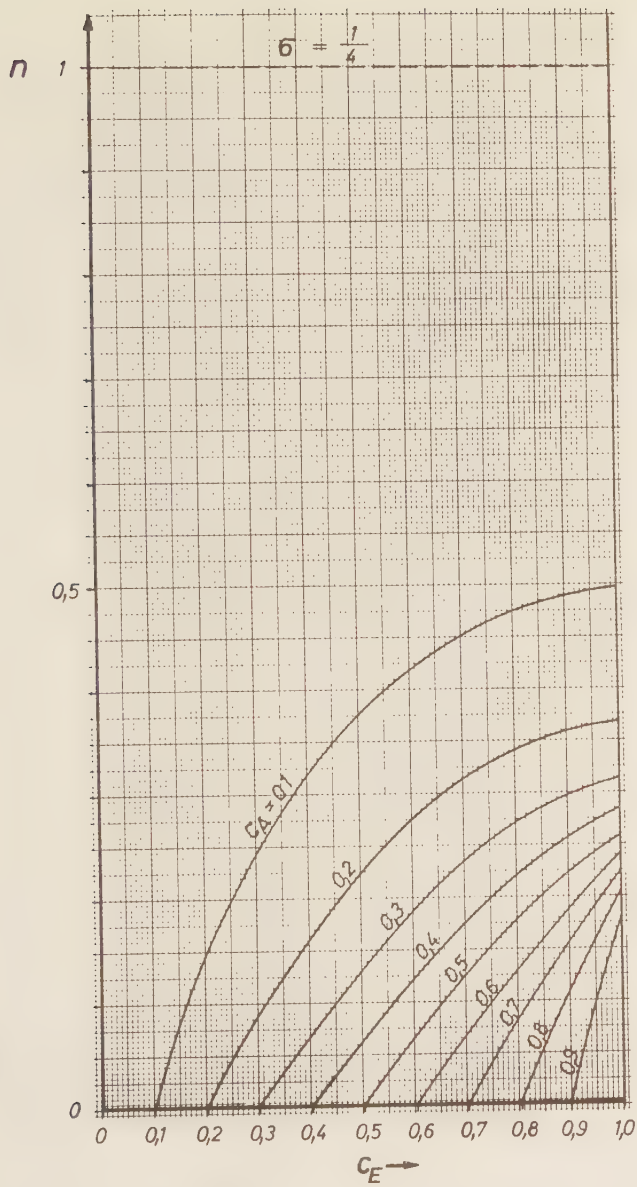
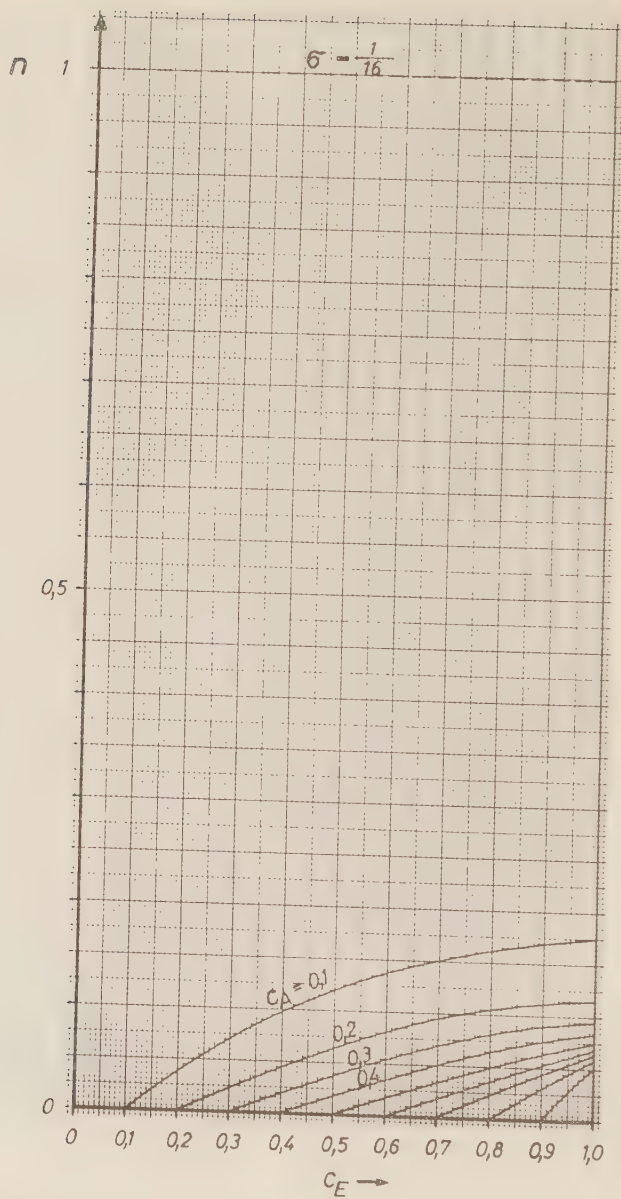


Abb.27 : Der optimale Nutzungsgrad n für zylindrische Trennröhre als Funktion der Entnahmekonzentration c_E . Parameter c_A und $\bar{\sigma}$.







Wirkungsgrades also wesentliche Unterschiede:

- a) Der Wirkungsgrad der optimalen Zylinderkaskaden hängt von der reduzierten Entnahme σ , also von der Größe der Anlage ab. Der Wirkungsgrad der optimalen Plattenkaskaden ist dagegen unabhängig von der Sollentnahme.
- b) Der optimale Wirkungsgrad von Zylinderkaskaden ist stets kleiner als bei den Plattenkaskaden. Der Nutzungsgrad variiert zwischen $0 \leq \eta < 1$, wenn man für die reduzierte Entnahme σ den ganzen Spielraum $0 \leq \sigma < \infty$ zuläßt.
- c) Im Grenzfall $\sigma = 0$ wird der Wirkungsgrad optimaler Zylinderrohre identisch gleich Null.
- d) Nur im Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ wird der Wirkungsgrad der idealisierten Plattenkaskaden von Zylinderrohren voll erreicht.
- e) Im praktisch wichtigen Labormaßstab⁺⁾ liegt der optimale Wirkungsgrad um Bruchteile oder sogar Zehnerpotenzen unter dem Optimum der planparallelen Rechnungen.

⁺⁾ Das Thermodiffusionsverfahren wurde zur Gastrennung bisher ausschließlich im Labormaßstab angewendet. Vgl. [7], Tab.5.

IV. GRENZEN DER OPTIMIERUNG

22. Turbulenzgrenze

Beim Turbulenzeinsatz findet die laminare Trennrohrtheorie ihre physikalische und mathematische Grenze.

Die bisherigen Untersuchungen der Turbulenz im Trennrohr [62][70][5][32] gehen vom Reynolds'schen Ähnlichkeitskriterium aus. Dabei wird derjenige Wert des dimensionslosen Verhältnisses

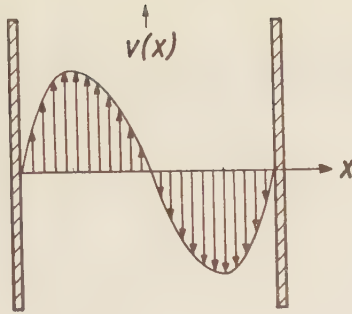
$$Re = \frac{\text{Beschleunigungsarbeit}}{\text{Reibungsarbeit}} = \frac{\bar{v} \rho x}{\eta} \approx 4 \sqrt{\frac{K_k}{K_d}} \approx 3\xi^3 \quad (49)$$

empirisch festgestellt, bei dem der kritische Umschlag der Konvektionsströmung $\bar{v}$ im Trennschlitz x von der stabilen laminaren in die labile turbulente Strömungsform erfolgt.

Experimentell wurden zwei Effekte beobachtet:

1. Becker[5] und Watson[32] fanden beim kontrollierten Überschreiten der kritischen Umklappphase statt einer verwirbelten Zerstörung sogar eine Verstärkung der Trennwirkung. Zur qualitativen Deutung schematisierte Becker das turbulente Strömungsprofil $v(x)$ durch ein laminares Ersatzbild (Abb.28). Er schnitt in Gedanken die turbulente Mittelzone heraus und führte durch Aneinandersetzen der beiden laminaren Prandtl-Grenzschichten eine "effektive" Spaltweite ein. Sie ist kleiner als die geometrische Spaltweite ($\xi_{eff} < 2 < \xi$). Dadurch hat sie eine höhere Trennschärfe, weil das Trennpotential ein Maximum bei $\xi=1$ hat. Auf dieses Ersatzschema wird dann die bisherige laminare Theorie angewendet. Experimentell ergab sich keine wesentliche Verbesserung des Wirkungsgrades, da im Endeffekt die gesteigerte Trennschärfe durch einen erhöhten Heizaufwand einigermaßen kompensiert wird: Das turbulente Trennrohr verbraucht mehr Energie, weil die von kleinen Wirbeln durchsetzte turbulente Mittelzone für den radialen Wärmestrom praktisch als Kurzschluß wirkt. Setzt man das turbulente Strömungsprofil $v(x)$ in die hydrodynamische Strömungsfunktion $\Phi(x)$ nach Kap.3 ein, so kann

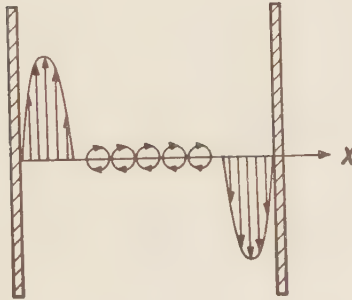
Laminare
Strömung



$$Re < 25$$

$$\xi < 2$$

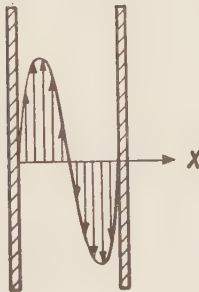
Turbulente
Strömung



$$Re > 25$$

$$\xi > 2$$

Laminares
Ersatzbild der
turbulenten
Strömung
(nach Becker [5])



$$Re > 25$$

$$\xi_{eff} < 2$$

Abb.28 : Turbulenz im Trennspace

man - bei Berücksichtigung der Diffusionseigenschaften der Wirbel - die turbulenten Transportfaktoren H, K_k, K_d untersuchen. Grundsätzlich stellt die Form des Strömungsprofils $v(x)$ einen **F r e i h e i t s g r a d** in dem Sinne dar, daß außer dem üblichen kubisch-parabolischen Gravitationsprofil bei der Optimierung auch andere Gegenstrom-Profilformen zur Konkurrenz zugelassen sind. Alexander [2] zeigte, daß der kubisch-parabolische Profiltyp tatsächlich nicht optimal ist. Dagegen würde das turbulente Strömungsprofil der idealen Form näherkommen. Der Wirkungsgrad sollte sich dadurch noch verbessern lassen. Die Frage nach der Optimierung ist hier noch offen, da man die Turbulenzvorgänge weder theoretisch noch experimentell ausreichend beherrscht.

2. Onsager und Watson [62] fanden experimentell, daß die kritische Reynolds-Zahl

$$Re_{krit} \approx 25$$

um ein bis zwei Zehnerpotenzen unter dem Wert $Re_{krit} \approx 10^3$ für die bekannte Hagen-Poiseuille-Rohrströmung liegt.

Wir untersuchen, inwieweit dieser Befund die Gültigkeit der Optimalbedingung (40) für Zylinderkaskaden begrenzt.

Ausgangspunkt der Stabilitätstheorie von Laminarströmungen ist die Störungsdifferentialgleichung von Orr-Sommerfeld [72]. Sie beschreibt das zeitliche Abklingen oder verstärkte Anwachsen kleiner Störströmungen, die dem laminaren Geschwindigkeitsprofil $v(x)$ in einem Plattenspalt (x) überlagert sind.

Rayleigh [66], Heisenberg [46] und Tollmien [74] leiteten hieraus ein Kriterium für den kritischen Reynolds'schen Grenzfall ab: Strömungsprofile $v(x)$, die einen Wendepunkt ($\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$) besitzen, werden turbulent, wenn der Einfluß der Beschleunigung ($K_k \sim \bar{v}^2 \rho$) gegenüber der dämpfenden Reibung ($K_d \sim D \rho \sim \eta$) überwiegt.

Die Anwendung dieses **W e n d e p u n k t s k r i t e r i u m s** auf das kubische Parabelprofil der Gegenstromkonvektion im Trennrohr ergibt somit als **T u r b u l e n z b e d i n g u n g**

$$\frac{K_k}{K_d} \gg 1.$$

Schon bei $\frac{K_k}{K_d} \approx 50$, nach (39)(49) entsprechend bei $\xi \approx 2$, wird demnach die Strömung hochgradig stör anfällig. Es genügt der leiseste Anstoß, um die energetisch labile laminare Konvektion in ein Turbulenzgleichgewicht umklappen zu lassen.

Für die Optimierung des Trennsohrs ergeben sich hieraus unmittelbare Konsequenzen:

Für die idealisierte P l a t t e n k a s k a d e erhielten Krasny-Ergen[51], Jones, Furry [50], Alexander[2] und Dickel[23] als Optimalbedingungen (25)(26):

$$\frac{K_k}{K_d} \rightarrow \infty$$

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}.$$

Für die realistische Z y l i n d e r k a s k a d e erhielten wir die davon abweichende Optimalbedingung (38)

$$\frac{K_k}{K_d} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{\tau}{\tau_A}}{1 - 2 \frac{\tau}{\tau_A}} \right]$$

als Umformung von

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{4 \frac{K_k}{K_d} + 1} \right].$$

Die Diskrepanz dieser Optimalbedingungen verschwindet demnach gerade dann, wenn die Turbulenzbedingung $\frac{K_k}{K_d} \gg 1$ erfüllt wird.

Dieser Zusammenhang ist in Abb.22 anschaulich abzulesen (wobei statt des Verhältnisses $\frac{K_k}{K_d} \equiv \frac{\xi^6}{2}$ gleich die reduzierte Spaltweite ξ als Abszisse auftritt): Die idealisierte $\frac{1}{2}$ -Bedingung fällt mit der realistischen Lösung gerade an der T u r b u l e n z g r e n z e $\xi \approx 2$ zusammen (Abweichung bei $\xi = 2 : 2,4\%$).

Die beiden unterschiedlichen Kaskadenkonzeptionen (planparallel bzw. zylindrisch), die bisher unabhängig nebeneinander behandelt wurden, haben also einen physikalischen Berührungspunkt, an dem sich die Widersprüche auflösen: Ihr charakteristischer Unterschied verwischt sich an der Turbulenzgrenze.

Damit eröffnet sich die Möglichkeit, an der Turbulenzgrenze zwanglos von der Optimaltheorie für Zylinderrohrkaskaden zur planparallelen Rechnung überzugehen.

23. Lineare Näherung

Bei der energetischen Optimierung des planparallelen P l a t - t e n p a a r e s erhält man die Kaskadenfunktionen (Trennsplattweite x , Plattenbreite y , Plattenlänge z , Heizleistung $\dot{Q}$) nach Kap.17 in Form einer c -Parameterdarstellung.

Zur praktischen Gewinnung der direkten Kaskadenmaße transformierte Dickel [21] sie auf eine explizite z -Darstellung, um sie in einem normierten Diagramm graphisch darzustellen.

Hierzu errechnet man zunächst die räumliche Konzentrations-schichtung $c(z)$ aus der Optimalbedingung (26) $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$ und der Transportgleichung (3) $\tau = \tau_A - K \frac{dc}{dz}$:

Über $\frac{dc}{dz} = \frac{1}{2} \frac{H}{K} c c'$ erhält man durch Integration (unter Berücksichtigung der Randbedingung $c = c_E$ für $z = 0$) den Ausdruck (29)

$$z = 2 \frac{K}{H} \int_{c_E}^c \frac{dc}{c c'} = 2 \frac{K}{H} \ln \frac{c_E c'}{c' c}.$$

Durch Auflösen nach c findet man daraus die Verteilung der Konzentration c über die Rohrlänge z

$$c(z) = \frac{1}{\frac{c'_E}{c_E} \exp \frac{z}{2 \frac{K}{H}} + 1}$$

Damit kann man $x(c)$, $y(c)$, $z(c)$, $F(c)$, $\dot{Q}(c)$ nach Kap.17 umrechnen in $x(z)$, $y(z)$, z , $F(z)$, $\dot{Q}(z)$:

$$x(z) \rightarrow \infty, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{2}{h x^3} \cdot s \frac{c_E - c(z)}{c(z) c'(z)} = \\ &= \frac{2}{h x^3} \cdot s \left[\sin \frac{z}{2 \frac{K}{H}} - (2c_E - 1) \left(\cos \frac{z}{2 \frac{K}{H}} - 1 \right) \right], \quad (51) \end{aligned}$$

$$z = 2 \frac{K}{H} \ln \frac{c_E c'(z)}{c'_E c(z)}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{4}{hx^3} \frac{K}{H} \cdot \int_c^{c_E} \frac{c_E - c(z)}{(c(z) c'(z))^2} dc = \\ &= \frac{4}{hx^3} \frac{K}{H} \cdot \left[\cos \frac{z}{2 \frac{K}{H}} - (2c_E - 1) \left(\sin \frac{z}{2 \frac{K}{H}} - \frac{z}{2 \frac{K}{H}} \right) - 1 \right], \quad (53) \end{aligned}$$

$$\dot{Q}(z) = \lambda \Delta T \frac{4}{hx^4} \frac{K}{H} \cdot \left[\cos \frac{z}{2 \frac{K}{H}} - (2c_E - 1) \left(\sin \frac{z}{2 \frac{K}{H}} - \frac{z}{2 \frac{K}{H}} \right) - 1 \right]. \quad (54)$$

In Abb. 29 ist die Plattenbreite $y(z)$ als Funktion der Plattenlänge z dargestellt. Die Kaskadenmaße y, z werden dabei dimensionslos normiert: $y^* = \frac{y}{2\lambda/(hx^3)}$, $z^* = \frac{z}{2K/H}$. Die gewünschte Endkonzentration c_E und der Konzentrationsverlauf $c(z)$ treten als Parameter auf. Eingetragen sind

1. die Schar der Breitenfunktionen $y^*(z^*, c_E)$ für feste Werte der Endkonzentration $c_E = \text{const}$ (ausgezogen),
2. die Schar der Kurven gleicher Konzentration $c = \text{const}$ (gestrichelt),
3. die Schar der Kurven gleicher Plattenfläche $F = \int_0^{z^*} y^* dz^* = \text{const}$ und damit gleicher Heizleistung $\dot{Q} = \lambda \frac{\Delta T}{x} \cdot F = \text{const}$ (gepunktet).

Das Entnahme-Rohrende (oben) liegt definitionsgemäß im Ursprung des Diagramms bei $z^* = 0$; es ist der Anfangspunkt für die Zählung der Längskoordinate.

Für jede Trennaufgabe kann man damit sofort die Plattenlänge z und den Verlauf der Plattenbreite $y(z)$ übersehen. Gleichzeitig ist man in der Lage, die zugehörige Konzentrationsschichtung $c(z)$ und den Energieaufwand $\dot{Q}$ zu entnehmen. Aus diesem **Extr ema l f e l d** aller energetisch optimalen Plattenkaskaden kann man für jeden Zweck den geeigneten Kompromiß zwischen Reinheit c_E , Menge s , apparativem Aufwand F und laufenden Kosten $\dot{Q}$ mit einem Blick graphisch abschätzen.

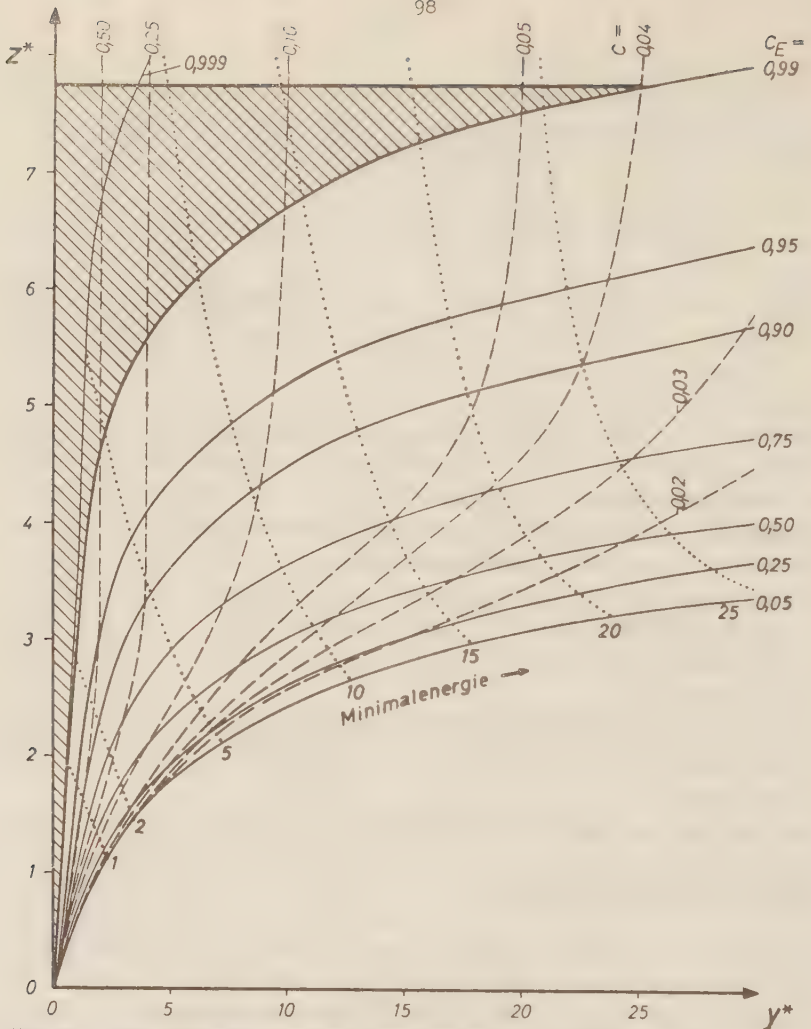


Abb.29 : Der optimale Verlauf der Breite y seitlich randloser Trennplatten als Funktion der Plattenlänge z . (Nach Dickel und Trötsch [24]).

Dargestellt ist die normierte Plattenbreite y^* (ausgezogen) in Abhängigkeit von der normierten Plattenlänge z^* für verschiedene Parameterwerte der Endkonzentration c_E . Als weitere Parameter treten die laufende Konzentration c (gestrichelt) und die normierte minimale Heizleistung Q^* (gepunktet) auf. Als Beispiel ist der Verlauf der Plattenbreite zur optimalen Anreicherung von $c_A = 4\%$ auf $c_E = 99\%$ schraffiert eingetragen. Das Entnahmeende befindet sich bei $z^* = 0$.

Wir ergänzen dieses Extremalfeld der Trenns spaltbreite y bzw. y^* durch ein entsprechendes Extremalfeld der Trenns paltweite x bzw. ξ . Es ermöglicht eine Übersicht über den Einfluß der Variablen x auf die Eigenschaften der optimalen Plattenkaskade: Für die Kaskadenfunktionen [Heizleistung (54), Plattenfläche (53), Anlaufzeit[†]), Plattenlänge (52)] ergeben sich bei veränderlicher Spaltweite x und fester Trennung ($c_A, c_E, s = \text{const}$) charakteristische Minima. Sie lassen sich (unter Berücksichtigung der x, ϱ -Abhängigkeit der Transportfaktoren $H \sim x^3 \varrho^2$, $K_k \sim x^2 \varrho^3$, $K_d \sim x \varrho$) mit Hilfe der reduzierten Trenns paltweite ξ folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \text{Heizleistung } \dot{Q} &\sim \xi^0 \left(1 + \frac{2}{\xi^6}\right) \rightarrow \xi_{\min} = \infty > 2 \\ \text{Plattenfläche } F &\sim \xi^1 \left(1 + \frac{2}{\xi^6}\right) \rightarrow \xi_{\min} = \sqrt[6]{10} = 1,47 \\ \text{Anlaufzeit } t &\sim \xi^2 \left(1 + \frac{2}{\xi^6}\right) \rightarrow \xi_{\min} = \sqrt[6]{4} = 1,26 \\ \text{Plattenlänge } Z &\sim \xi^4 \left(1 + \frac{2}{\xi^6}\right) \rightarrow \xi_{\min} = \sqrt[6]{1} = 1,00. \end{aligned}$$

In Abb.30 sind diese Kaskadenfunktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt. Um die Abweichungen vom Minimum bei Änderung von ξ sofort übersehen und entsprechende Kompromisse bilden zu können (z.B. zwischen Heizleistung, Anlaufzeit und Plattenlänge) sind alle Minima auf 1 normiert. Das Diagramm zeigt deutlich eine untere und obere Grenze der reduzierten Trenns paltweite ξ :

Für $\xi < 1$ überwiegt der Einfluß der Rückdiffusion ($1 + \frac{2}{\xi^6}$) derart, daß alle Kaskadeneigenschaften rapide verschlechtert werden. Für $\xi > 2$ gewinnt man nur bei der Heizleistung eine geringe Einsparung (maximal 3,1% gegenüber $\xi = 2$).

Alle interessierenden Optima sind auf das Intervall $1 \leq \xi \leq 2$ zusammengedrängt. Dieses Intervall ist allein für den Kaskadenbau verwertbar. Dasselbe Ergebnis hatten wir schon in Kap.19, Punkt 1 c bzw. Abb.22 auf andere Weise gefunden. Jeder Wert von ξ enthält dabei zwei Freiheitsgrade: Man kann die gewünschten Trenneigenschaften bei gegebenem Druck $p \sim \varrho$ durch Variation

[†]) Näheres siehe Kap. 28.

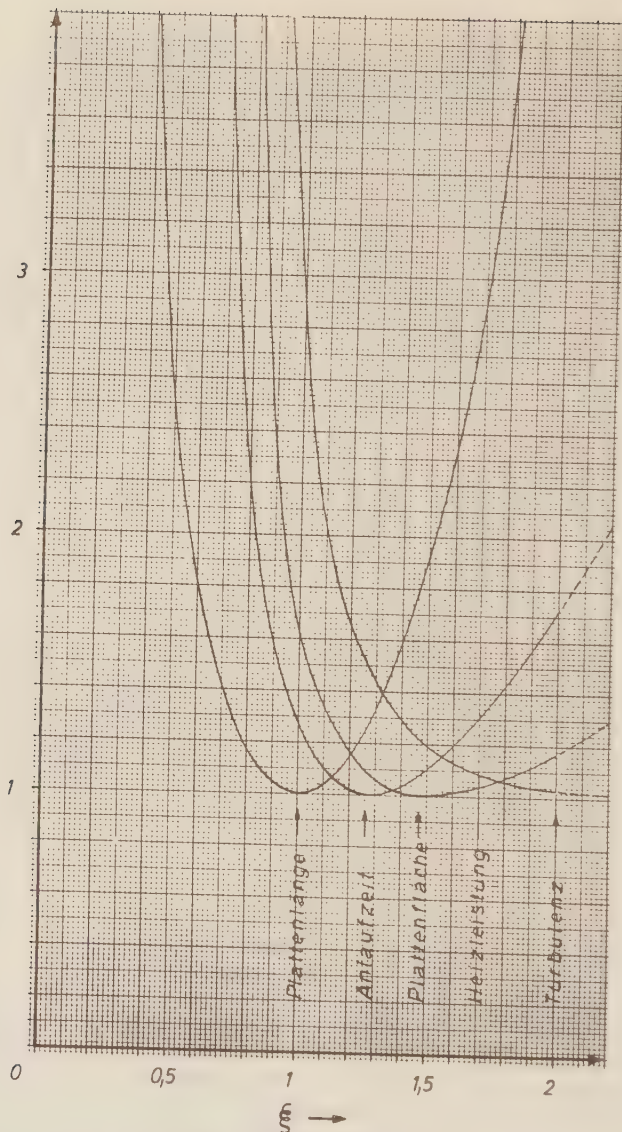


Abb.30 : Die Plattenlänge Z , Anlaufzeit t_0 , Plattenfläche F , Heizleistung Q (alle dimensionslos normiert) für seitlich randlose Trennplatten als Funktion der reduzierten Trennspaltweite $\xi = \frac{x}{R_0}$.

der Spaltweite x , oder bei gegebener Rohrkonstruktion durch Variation des Druckes p wahlweise einzustellen.

Die bisherigen Rechnungen zur planparallelen Optimierung hatten durchwegs die Voraussetzung *seitlich randloser Platten*.

Die Vernachlässigung der *Randbedingungen* an den seitlichen Begrenzungsflächen des Trennspaltes (Abb.2) ist eine übersichtliche Idealisierung. Sie ist jedoch physikalisch nicht realisierbar, da die energetische Optimierung eine Plattenbreite y liefert, die bei allen Plattenkaskaden zum Entnahmeende hin auf Null abnimmt. Das Endergebnis der Optimierung widerspricht somit der Voraussetzung.

Geringe Entnahmen ($s \approx 0$) erfordern nur kleine Plattenbreiten ($y \approx 0$). Die planparallelen Rechnungen verlieren daher besonders bei Laboranlagen ihre strenge Gültigkeit^{*)}. Wegen der Proportionalität der Kaskadenfunktionen $y, F, \dot{Q}$ stellen diese Rechnungen eine *erste lineare Näherungslösung* des Optimierungsproblems dar. Die Güte dieser linearen Näherung nimmt dabei mit fallender Sollentnahme s ab.

Im Bereich der Laboranlagen ($s \approx \text{mg/Tag}$) haben die linearen optimaltheorien [51][50][15][2][23] daher eine prinzipielle *Gültigkeitsgrenze*.

Eine genauere Rechnung hat daher auf den Ansatz für ein *seitlich begrenztes Rechteckrohr* nach Kap.16 zurückzugreifen. Die Einführung der Formfaktoren berücksichtigt dann die bisher vernachlässigten Randbedingungen an den seitlichen Begrenzungsflächen des Trennspaltes. Die linearen Kaskadenfunktionen des unberandeten Plattenpaares werden auf diese Weise durch nichtlineare Korrekturglieder modifiziert.

^{*)} Näheres siehe Kap.25, Punkt 4.

24. Nichtlineare Lösung

Bei der energetischen Optimierung von Zylindern erhält man die Kaskadenfunktionen (Trennsplattweite x , mittlerer Rohrumfang y , Rohrlänge z , Heizleistung $\dot{Q}$) nach Kap. 20 in Form einer (reduzierten) c, c_e, σ -Parameterdarstellung:

$$\xi(c) = \frac{x}{R_0} = \frac{R_a - R_i}{R_0} = \sqrt[4]{2\sigma \frac{c_E - c}{cc'} + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sigma(c_E - c)/cc'}} \quad (55)$$

$$\eta(c) = \frac{y}{R_0} = \xi \pi \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1}, \quad \frac{R_a}{R_i} = \text{const} \quad (56)$$

$$\zeta(c) = \frac{z}{L_0} = 4\sigma \int_c^{c_E} \frac{dc}{(cc')^2} + 3 \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{\sigma}{3}(c_E - c)} \quad (57)$$

$$\dot{Q}(c) = \dot{Q}_0 z = \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \left(4\sigma \int_c^{c_E} \frac{dc}{(cc')^2} + 3 \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{\sigma}{3}(c_E - c)} \right) \quad (58)$$

Der gewünschte Entnahmestrom s tritt hierbei in reduzierter Form $\sigma = \frac{s}{s_0}$ auf. Dabei wird $s_0 = R_0^4 h \varphi \pi \frac{R_a}{R_i} + 1$ empfindlich vom frei wählbaren Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ bestimmt.

Die reduzierte Trennsplattweite ξ ist nach unten durch die Rückdiffusion, nach oben durch die Turbulenz auf das Intervall $1 \leq \xi \leq 2$ beschränkt.

Vom Entnahmeende ($\xi = 1$) gelangt man längs des Rohres fortschreitend zu größeren Splattweiten ($\xi > 1$). An der Turbulenzgrenze ($\xi \approx 2$) ist dann die obere Grenze des Spielraums für den x -Freiheitsgrad erreicht.

Von $\xi \approx 2$ an kann die optimale Transportführung mit Hilfe des y -Freiheitsgrades $\eta = n \cdot \xi \pi \frac{R_a}{R_i} + 1$ realisiert werden.

Es bieten sich zwei Möglichkeiten:

1. Parallelschaltung von n Einzelrohren mit konstantem Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$,
2. Einzelrohr ($n = 1$) mit variablem Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$.

1. David [17] arbeitet mit $n = 1, 2, 3, \dots; 1 \leq \xi \leq 2; \frac{R_a}{R_i} = \text{const.}$

Er läßt dabei die reduzierte Spaltweite ξ der Einzelrohre vom Entnahmeende ($\xi=1$) zum Einspeisende ($\xi=2$) hin monoton wachsen⁺ (Abb.31a). Die Anzahl n der Einzelrohre nimmt dabei zum Einspeisende hin stufenweise zu. Es ergibt sich ein gestuftes Netzwerk von parallel- und hintereinandergeschalteten Rohren konstanten Radienverhältnisses $\frac{R_a}{R_i}$ und variabler Spaltweite $R_a - R_i$ (Abb.31b). Seine Verzweigungspunkte sind in mehreren komplizierten Rechenschritten zu bestimmen [17].

2. Arbeitet man mit $n = 1; 1 \leq \xi \leq 2; 1 \leq \frac{R_a}{R_i} < \infty$, so erhält man ein einziges durchgehendes Doppelmantel-Rohr. Sowohl die Trennspaltweite als auch das Radienverhältnis sind variabel (Abb.31).

Für variables $\frac{R_a}{R_i}$ wird die mathematische Darstellung der Kaskadenfunktionen wesentlich komplizierter⁺⁺).

Die Komplikationen lassen sich aber auf einfache Weise durch einen stetigen Übergang von der zylindrischen zur planparallelen Optimierung beseitigen:

Dieser Übergang wird durch die beiden wichtigen Eigenschaften des Thermodiffusionsverfahrens ermöglicht, daß

a) an der Turbulenzgrenze die Optimalbedingung der Zylinderrohre (40) in die Optimalbedingung der Plattenpaare (26) übergeht (Kap.22),

b) die minimale Heizleistung von Zylinderrohren für $\xi > 1,3$ nahezu unabhängig vom Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ ist (Kap.19).

Dadurch ergibt sich eine durchsichtige Rechen- und Konstruktionsmethode für energetisch optimale Zylinderkaskaden mit beliebiger Trennleistung.

⁺) Dickel und Trötsch[27] geben an, daß Davids Kaskaden auf das normierte Extremalfeld der Abb.29 zurückführbar sind. Diese Bemerkung ist irrtümlich.

⁺⁺) Die Annahme eines konstanten Radienverhältnisses hatten wir bisher nur gemacht, um explizite Rechenausdrücke zu erhalten (Vgl.Kap.20, Punkt 4).

Hierzu unterteilen wir das Kaskadenschema an der Turbulenzgrenze $\xi = 2$ mathematisch in einen "zylindrischen Endteil" und einen nahezu "planparallelen Anfangsteil". Wir berechnen beide Teile gesondert nach den dafür entwickelten Optimaltheorien und setzen sie dann stetig aneinander:

Im E n d t e i l ist $R_a - R_i = \text{variabel}$, $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$. Die geometrischen Abmessungen ergeben sich aus (Kap.20):

$$\begin{aligned}\xi(c) &= \sqrt[4]{2\sigma \frac{C_E - C}{CC'} + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sigma(C_E - C)/CC'}} \leq 2, \\ \eta(c) &= \xi \pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1} \leq 2\pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1}, \quad \frac{R_a}{R_i} = \text{const} \\ \zeta(c) &= 4\sigma \int_c^{C_E} \frac{C_E - C}{(CC')^2} dc + 3 \int_c^{C_E} \frac{dc}{CC' + \frac{C}{3}(C_E - C)}, \\ \dot{Q}_E(c) &= \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \zeta(c).\end{aligned}$$

Hat man das konstante Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ zweckmäßig gewählt, so kann man die Kaskadenfunktionen unmittelbar berechnen (Näheres siehe Anhang). Erreicht man dabei — vom Entnahmeende $\xi = 1$ ausgehend — bei $\xi = 2$ die Turbulenzgrenze, so unterbricht man die zylindrische Rechnung an dieser Stelle. Man rechnet von hier ab mit planparalleler Geometrie weiter (Abb.31a).

Im A n f a n g s t e i l ist $R_a - R_i = \text{const}$, $\frac{R_a}{R_i} = \text{variabel}$. Man hat dann ein zylindrisch aufgerolltes näherungsweise^{*)} planparalleles Plattenpaar vor sich. Daher vereinfachen sich die Kaskadenfunktionen auf die Beziehungen von Kap.23:

$$\begin{aligned}\xi(c) &= 2 \\ \eta(c) &= \frac{1}{4R_0^4 h \varphi} \cdot \frac{C_E - C}{CC'} \\ \zeta(c) &= 33 \int_c^{C_E} \frac{dc}{CC'} \\ \dot{Q}_A(c) &= \lambda \Delta T \frac{L_0}{R_0^4 h \varphi} 4\sigma \int_c^{C_E} \frac{C_E - C}{(CC')^2} dc.\end{aligned}$$

^{*)} Siehe Kap.25, Punkt 3.

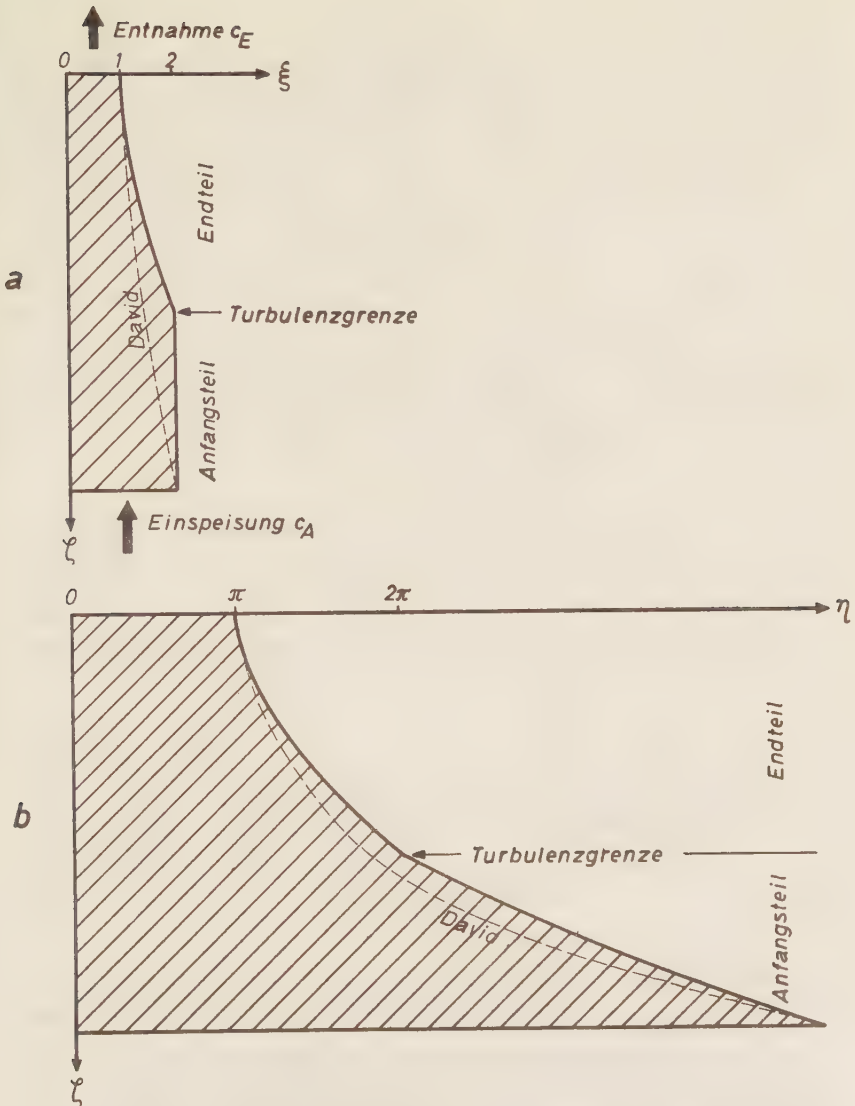


Abb.31 : Qualitatives Beispiel für die optimale Dimensionierung zylindrischer Trennröhre.

a : Die reduzierte Trennspaltweite ξ ,

b : der reduzierte mittlere Trennspaltumfang η als Funktion der reduzierten Rohrlänge ζ .

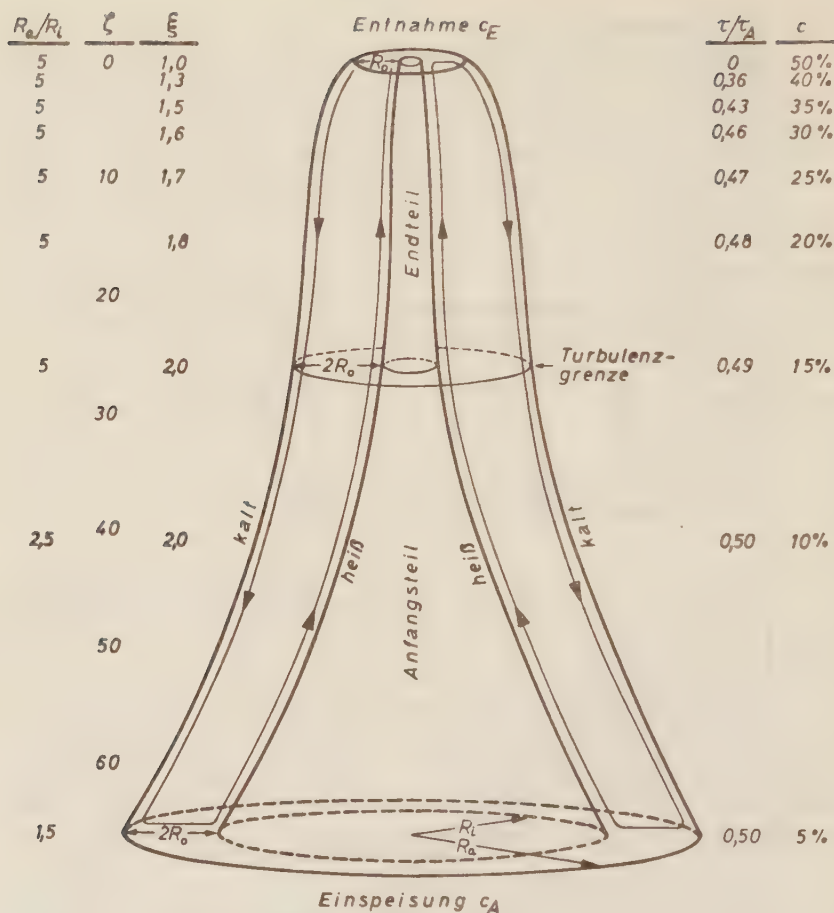


Abb.32 : Quantitatives Beispiel einer optimalen Trennröhrkaskade. Arbeitsteilung eines nahezu "planparallelen" Anfangsteils zur Steigerung des Anfangstransportes und eines zylindrischen Endteils zur Steigerung der Trennschärfe.

Die dargestellte Kaskade löst das Trennproblem $c_A = 5\%$, $c_E = 50\%$, $\sigma = 3$. Zur besseren Veranschaulichung sind die Länge und die Breite der Anlage in zwei verschiedenen Maßstäben dargestellt : Das tatsächliche Verhältnis von Länge zu Breite der Anlage ist etwa 200 : 1.

Die Berechnung ist im Anhang als Beispiel für die Anwendung der Formeln durchgeführt.

Die Rohrgeometrie entnimmt man graphisch aus dem y (z^*)-Extremalfeld (Abb.29): Dem Plattenpaar (Konzentrationsgrenzen c_A, c_E) wird dabei an der Stelle $c = c^*$ die Spitze abgeschnitten. Der Umfang y der verbleibenden Pyramidenbasis wird so normiert, daß er an der Trennstelle $c = c^*$ stetig in den mittleren Rohrumfang des Endteils übergeht (Abb.31b).

Die gesamte erforderliche Mindestheizleistung setzt sich aus der Summe beider Rohranteile zusammen:

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_A = \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_0}{R_i}} & \left(46 \int_{c^*}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + 3 \int_{c^*}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{2}{3}(c_E - c)} \right) + \\ & + \lambda \Delta T \frac{L_0}{R_0^4 h \varphi} \cdot 4s \int_{c_A}^{c^*} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc. \end{aligned} \quad (59)$$

Dieser Betrag ist nahezu^{*)} genauso groß wie bei der Parallelschaltung von n Einzelrohren nach David [17].

Der zusammengesetzte optimale Zylinderrohrtyp ist in Abb.32 anhand eines quantitativen Beispiels graphisch dargestellt.

25. Duale Lösung

Wir diskutieren die Leistungsfähigkeit und den Gültigkeitsbereich der beiden nebeneinander entwickelten Kaskadenmodelle (planparallel, zylindrisch).

1. a) Die planparallele Optimierung (Kap.17) mit kartesischen Koordinaten x, y führt auf die Optimalbedingung $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$.

b) Die zylindrische Optimierung (Kap.19) mit radialen Koordinaten $R_a - R_1, \frac{R_0}{R_i}$ führt auf die Optimalbedingung $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2 \cdot 5^{6+1}} \right)$.

Der Unterschied besteht in dem zusätzlichen Klammerausdruck. Er berücksichtigt die Rückdiffusion (die im planparallelen Fall durch genügend große Spaltweite ($\xi = 2$) fast völlig zurückgedrängt wird).

^{*)} Bis auf Einflüsse von der Größenordnung 1 infolge unterschiedlicher Formfaktoren und etwas geänderter Rückdiffusion.

Im Energieausdruck $\dot{Q}$ führt das k o n s t a n t e Glied $\frac{1}{2}$ auf die u n i v e r s e l l e Wertfunktion.

Das v a r i a b l e Zusatzglied $\frac{3}{2(2\xi^6+1)}$ führt auf die Rückdiffusionsfunktion (Kap.20).

Die zylindrische Optimierung ergibt für G r o ß a n l a g e n ($\lambda \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow 2$) den asymptotischen Grenzwert $\lim_{\xi \rightarrow 2} \frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$ (Abb.22).

Man wird dadurch direkt auf die s-linearen Theorien [51] [50] [15] [2] [23] der planparallelen Optimierung geführt. Die linearen Theorien sind also (wegen der in Kap.22 näher begründeten asymptotischen Äquivalenz an der Turbulenzgrenze) ein Grenzfall unserer nichtlinearen Lösung.

Die Beschränkung Davids [17] auf $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$ haben wir für den "Anfangsteil" auf $1 \leq \frac{R_a}{R_i} < \infty$ verallgemeinert. Für den "Endteil" entfällt die einschränkende Bemerkung von Dickel und Trötsch [26], daß durch die Wahl von $R_a - R_1 = \text{variabel}$, $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$ "bei der Suche nach den optimalen Abmessungen x und y nicht getrennt variiert" und damit "spezielle ideale Kaskaden mit sich änderndem x ... gefunden" wurden.

Dickel und Trötsch argumentieren folgendermaßen^{*)}: Hält man $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$, so sind die Spaltweite $x = R_a - R_1$ und die Spaltbreite $y = x\pi \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1}$ nicht mehr unabhängig voneinander variierbar. Es ergeben sich daher nur spezielle optimale Lösungen.

Die tatsächliche Situation ist (nach Kap.19) folgende: Es werden $x = R_a - R_1$ und $\frac{R_a}{R_i}$ variiert. Beide Variable sind voneinander völlig unabhängig. Als Ergebnis dieser Variation findet man, daß x längs der Kaskade notwendig veränderlich sein muß. Dagegen ist der minimale Energieverbrauch von der Variablen $\frac{R_a}{R_i}$ fast völlig unabhängig. Man kann daher $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$ wählen. Diese Freiheit ist ein E r g e b n i s der Variation, nicht aber eine spezielle Annahme zur Variation.

^{*)} Persönliche mündliche Mitteilung.

2. Die linearen Theorien gelten näherungsweise für Großanlagen. Sie lassen sich aber nicht mehr auf den Bereich der Laboranlagen extrapolieren, ohne daß Widersprüche auftreten. An zwei Grenzbetrachtungen läßt sich dies unmittelbar einsehen:

- a) Im Grenzfalle $\sigma \rightarrow \infty$ (Großanlagen) besteht die zylindrische Optimalkaskade fast nur aus "Anfangsteil". Lediglich gegen das Entnahmeende ($c \rightarrow c_E$) hin treten Abweichungen von der nahezu planparallelen Dimensionierung auf. Der Energiebedarf (59) wird daher fast ausschließlich durch das 1. Integral (Wertfunktion) bestimmt. Man erhält nahezu völlige Übereinstimmung mit den bisherigen linearen Theorien:

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$$

$$\xi = 2$$

$$\eta = \sigma \frac{\pi}{4} \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1} \cdot \frac{c_E - c}{cc'}$$

$$\zeta = 33 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 L_0 \cdot 4\sigma \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc$$

$$\eta_{th} = \left[\alpha^2 \frac{D\rho}{8\lambda} \frac{R}{M} \frac{\Delta T}{T} \right] \cdot \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc / \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc .$$

- b) Im Grenzfalle $\sigma = 0$ (entnahmefreie Laboranlagen) besteht die zylindrische Optimalkaskade nur aus "Endteil". Der Energiebedarf (59) wird ausschließlich durch das nicht-lineare 2. Integral (Rückdiffusionsfunktion) bestimmt. Diesen Fall löst die Optimierung von Waldmann [79], die mit konstanter Spaltweite $x = R_0$ und konstanter Spaltbreite y arbeitet (Abb.33). Man erhält maximale Abweichung der linearen von der nichtlinearen Theorie:

Lineare Theorie (für $\delta = 0$)

$$\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$$

$$\xi = 2$$

$$\eta = 0$$

$$\zeta = 33 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'}$$

$$\dot{Q} = 0$$

$$\eta_{th} = \left[\alpha^2 \frac{D \rho}{8 \lambda} \frac{R}{M} \frac{\Delta T}{T} \right] \frac{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc}{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc}$$

Nichtlineare Theorie (für $\delta = 0$)

$$\frac{\tau}{\tau_A} = 0$$

$$\xi = 1$$

$$\eta = 2\pi \frac{R_a/R_i + 1}{R_a/R_i - 1}$$

$$\zeta = 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 L_0 \cdot 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'}$$

$$\eta_{th} = 0.$$

3. Die Methode der radialen Korrekturfaktoren von Dickel [21] [24] [76] hat das Ziel, die Optimierung des randlosen planparallelen Plattenpaares auf den Fall der Zylinderrohre und damit auch auf kleinere Laboranlagen zu übertragen. Hierzu werden die Optimalbedingungen zunächst am Fall des seitlich randlosen Plattenpaares abgeleitet. Die Lösungsgleichungen sind in s linear. Zur Beschreibung der ins Auge gefaßten zylindrischen Anordnung werden die Größen $H, K_k, K_d, \dot{Q}$ anschließend mit den zugehörigen radialen Formfaktoren $\varphi(\frac{R_a}{R_i})$, $\psi(\frac{R_a}{R_i})$, $\chi(\frac{R_a}{R_i})$, $\omega(\frac{R_a}{R_i})$ multipliziert. Die Schwierigkeiten dieser Methode liegen in folgender Überlegung:

Nach Waldmann und Jensen [49], Fleischmann und Jensen [37] sind die Formfaktoren von Zylinderrohren in ihrer geometrischen Abhängigkeit Funktionen des Radienverhältnisses $\frac{R_a}{R_i}$ (Abb. 5). Ihr Auftreten ändert die Größe der Transportfaktoren. Man ist daher gezwungen, den Ausdruck für den Wärme-

strom $d\dot{Q}$ (21) auf solche Variable zu transformieren, deren Variation explizit durchführbar ist (z.B. $\frac{\partial}{\partial(R_a - R_i)}$, $\frac{\partial}{\partial(R_a/R_i)}$). Durch die Transformation der kartesischen Variablen x, y (Kap.16) treten aber geometrische Umrechnungsfaktoren auf (Kap.19). Diese Formfaktoren und Umrechnungsfaktoren müssen mit in die Variation hineingenommen werden. Dann ergeben sich nichtlineare Optimalbedingungen, die auch noch den Fall extrem zylindrischer Trennröhre im Labormaßstab beschreiben. Beim Vorgehen von Dickel werden die Formfaktoren dagegen nicht mit in die Variation einbezogen. Infolgedessen treten auch keine Umrechnungsfaktoren auf. Die Formfaktoren werden dann (ohne Begründung) an das lineare Endergebnis nachträglich heranmultipliziert.

M u l t i p l i k a t i v e Korrekturfaktoren können aber die Schwierigkeiten der obigen Gegenüberstellung nicht beseitigen, da die Linearität der Theorie dadurch erhalten bleibt.

Alexander [2] berücksichtigt auch die Rückdiffusion durch einen Korrekturfaktor. Er kommt dadurch zu dem Ergebnis: "Die Rückdiffusion bereitet keine größeren Schwierigkeiten". Die zylindrische Theorie ergibt dagegen: Gerade das a d d i t i v e nichtlineare Rückdiffusionsglied bringt die entscheidende Nichtlinearität in die Kaskadentheorie hinein und bedingt damit die mathematischen Schwierigkeiten in Kap.20.

Dieser nichtlineare Einfluß der Rückdiffusion kann den Wirkungsgrad von Laboranlagen um Zehnerpotenzen verringern (Kap.32). Andererseits werden die langen spitzen Endteile der Plattenkaskaden nach der zylindrischen Rechnung (durch erhöhte Trennschärfe infolge abnehmender Spaltweite) wesentlich verkürzt (Vgl. Abb. 29, 31, 32, 43).

Die Schlußfolgerung von Dickel [28], "man würde ... (durch Variation der Trennspaltweite ξ) nichts gewinnen, was über den Rahmen der ... (linearen) Theorie hinausgeht", wird von der zylindrischen Rechnung nicht bestätigt:

Der tatsächliche Gewinn der realen Zylinderkaskaden beruht darin, daß sie (bei notwendig geringerem Wirkungsgrad) gegenüber den idealisierten Plattenkaskaden bis zu 11-mal kürzere Rohrlängen erfordern (vgl. Punkt 2b).

4. Die lineare Näherungsmethode Dickels approximiert die Optimierung von Großanlagen. Aber auch hier hat sie keine strenge Gültigkeit. Die linearen Kaskadenfunktionen (Kap.23) führen auf systematische Widersprüche:

- a) Für jedes hydrodynamisches Strömungsproblem mit stationären äußeren Bedingungen existiert prinzipiell eine stationäre Lösung der Navier-Stokes-Gleichung. Die Lösung existiert formal für beliebige Reynolds-Zahlen [52]. Die Lösung (27)(28) für randlose Plattenkaskaden $x \rightarrow \infty$, $y = \frac{2}{\pi x^3} \Delta \frac{c_E - c}{c c'} \rightarrow 0$ ist aber ein Widerspruch zu der im hydrodynamischen Ansatz (Kap.4) gemachten Randbedingung $y \gg x$. Das Endergebnis widerspricht somit der Voraussetzung. Diese Schwierigkeit läßt sich weder durch Anbringen von radialen Korrekturfaktoren, noch durch das Argument des rechtzeitigen Turbulenzeinsatzes bei $x \approx 2 R_0$ beseitigen. Die Frage nach der physikalischen Stabilität eines Strömungsprofils (Kap.22) ist unabhängig von der mathematischen formalen Lösung des hydrodynamischen Randwertproblems [52].
- b) Nimmt man infolge Turbulenz eine endliche Trennspaltweite $x \approx 2 R_0$ an, so wäre bei allen optimalen Plattenkaskaden (auch Großanlagen) am Rohrende ($c = c_E$) nach (28) stets der mittlere Rohrumfang $y = 0$. Das Trennrohr würde dadurch am Entnahmeende abgeschlossen. Man könnte das Trennprodukt überhaupt nicht kontinuierlich entnehmen. Andererseits ergäbe sich rein geometrisch aus $x = 2 R_0$ ein mittlerer Rohrumfang $y = \pi x P > 0$ im Widerspruch zu $y = 0$.
- c) Für entnahmefreie optimale Laboranlagen ($\delta = 0$) wäre bei endlicher Trennspaltweite $x = 2 R_0$ der mittlere Rohrumfang y nach der linearen Theorie längs des ganzen Rohres identisch gleich Null. Ebenso wäre die erforderliche Heizleistung $\dot{Q} = 0$. Die bekannten Versuche von Clusius

und Dickel [10] haben dagegen gezeigt, daß allein zur Aufrechterhaltung einer stationären entnahmefreien Konzentrationsschichtung ein erheblicher Mindestbetrag an Heizleistung erforderlich ist. (Näheres siehe Kap.32).

5. Die duale Lösbarkeit des Optimierungsproblems nach Kap.13 durch Zuordnung einer Maximalaufgabe ($\dot{A} = \max$, $\dot{Q} = \text{const}$) und einer dualen Minimalaufgabe ($\dot{A} = \text{const}$, $\dot{Q} = \min$) gibt uns eine Möglichkeit zur Beurteilung der inneren Konsistenz der nichtlinearen zylindrischen Lösung.
- Die Maximalaufgabe der Trennleistung (Kap.11) erfordert keine spezielle Koordinatenwahl. Sie führt über die Entropiebilanz auf die Optimalbedingung der Trennleistung (14)

$$0 \leq \frac{\tau}{\tau_A} \leq \frac{1}{2}.$$

Die Minimalaufgabe führt über die Energiebilanz auf die Optimalbedingung der Heizleistung (40)

$$0 \leq \frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2\xi^2 + 1} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Das Optimierungsproblem des Wirkungsgrades ist damit auf zwei unabhängigen Wegen gelöst. Die Endergebnisse decken sich.

Zwischen den Optimalbedingungen der Trennschärfe (Kap.9), der Trennleistung (Kap.11) und der Heizleistung (Kap.19) besteht ein enger innerer Zusammenhang:

Die Optimierung der Trennschärfe führte zu den Bedingungen $s = 0$, $\xi = 1$: Man erzielt bei vorgegebener Rohrlänge die höchstmögliche Endkonzentration, wenn man entnahmefrei mit der Spaltweite $x = R_0$ arbeitet. Dann ist längs der gesamten Anlage der Transport $\tau \equiv 0$. Mit diesem τ folgt aus der Optimalbedingung der Heizleistung (40) ebenfalls $\xi \equiv 1$.

Damit ist auch das Optimierungsproblem der Trennschärfe auf zwei unabhängigen Wegen als Maximalaufgabe des Gibbs'schen Potentials und als Minimalaufgabe des Wärmestroms gelöst.

Unsere Theorie ist hier im Einklang mit der energetischen Optimierung von Waldmann [79].

Die Optimalbedingung (40) ergibt also im Grenzfall verschwindender Entnahme ein asymptotisches Zusammenfallen der drei Bedingungen für Trennleistung, Heizleistung und Trennschärfe (vgl. Schlußbemerkung Kap.11).

In der Theorie von Dickel werden diese Bedingungen gegeneinander ausgeschlossen: "Bei (der)... Arbeitsweise (mit optimaler Trennschärfe) erreicht man ... keineswegs die optimale Trennleistung", bzw. "die Bedingung der maximalen Trennschärfe ist ... nicht identisch mit der Bedingung des minimalen Energieaufwandes" [19][21].

6. Damit schließen sich die Überlegungen zu einer Synthese von Begriffen und Bedingungen, die bisher in scheinbarer Widersprüchlichkeit gegeneinander standen und zu Mißverständnissen und Mißdeutungen in Theorie und Experiment Anlaß gaben: Die Optimalbedingungen für Trennleistung, Heizleistung und Trennschärfe schließen sich nicht gegenseitig aus. Sie werden längs jeder optimalen Zylinderkaskade nebeneinander und gleichzeitig wirksam, um sich in einer optimalen Arbeitsteilung gegenseitig zu ergänzen (vgl. Kap.20, Punkt 4).

Unsere Optimalbedingung des Wirkungsgrades $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2\xi^2 + 1} \right)$ ergibt für das bestmögliche Arbeiten mit Trennrohren folgende Grundregeln^{*)}:

- I. Der Trenndruck muß immer so eingestellt sein, daß die reduzierte Trennspaltweite am Entnahmeende ($\tau=0$) gerade $\xi=1$ ist.
- II. Will man entnahmefrei trennen ($\tau \equiv 0$), so ist längs des ganzen Rohres der Querschnitt konstant und $\xi \equiv 1$.

^{*)} Eine schematische Anleitung zur praktischen Kaskadenberechnung findet sich im Anhang.

III. Will man mit kontinuierlicher Entnahme trennen ($\tau = 4(c_E - c)$), dann muß sowohl die Spaltweite als auch der Spaltumfang vom Entnahmeende zum Einspeisende hin kontinuierlich zunehmen ($1 \leq \xi(c) \leq 2$).

IV. Wird eine so große Produktionsrate s gefordert, daß man dabei den Wert $\xi \approx 2$ erreicht (Turbulenzgrenze), so vereinfacht sich die Optimalbedingung von hier an auf $\frac{\tau}{c_A} = \frac{1}{2}$. Man erfüllt sie bei konstanter Trennspaltweite $\xi = 2$ durch entsprechende Zunahme des Spaltumfangs.

V. Der enge Endteil ($\xi = 1$) arbeitet auf höchste Trennschärfe, der weite Anfangsteil ($\xi = 2$) auf hohen Transport. Beide ergänzen sich zu einer kontinuierlichen Arbeitsteilung mit optimalem Wirkungsgrad.

VI. Nur ein sehr kleiner Bruchteil des eingespeisten Wärmestroms wird dabei als reversible Trennarbeit gewinnbar. Der optimale thermodynamische Wirkungsgrad ist

$$\eta_{th} = \left[\alpha^2 \frac{Dg}{8\lambda} \frac{R}{M} \frac{\Delta T}{T} \right] \cdot \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc / \left(\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + \frac{3}{4\sigma} \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{2}{3}(c_E - c)} \right).$$

Er kann die obere Schranke $\eta_{th} < \frac{\alpha^2}{100} < \frac{1}{400} \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2$ prinzipiell nicht überschreiten.

7. Zusammenfassend ergibt die Diskussion, daß alle bisher für die Optimierung des Isotopentrennrohrs angegebenen Lösungen in dem vorgeschlagenen Kaskadenmodell als Sonderfälle enthalten sind:

Waldmann (1939)	[79] :	$\sigma = 0$
Krasny-Ergen (1940)	[51]	} : $\sigma \rightarrow \infty$
Jones, Furry (1946)	[50]	
Alexander (1960)	[2]	
Dickel (1963)	[21]	
David (1953)	[17] :	$0 \leq \sigma < \infty$

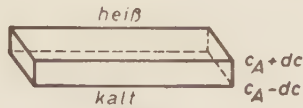
Unser Modell beschreibt alle Fälle von kleinen Laboranlagen bis zu großen Industrieanlagen.

Der äußere Unterschied in der geometrischen Dimensionierung zwischen den planparallel optimierten und anschließend zylindrisch "aufgerollten" Plattenkaskaden[51][50][2][23] und den wirklich zylindrisch optimierten Zylinderkaskaden besteht darin, daß die Trennspaltweite längs der Kaskade nicht mehr konstant bleibt. Sie tritt als neuer Freiheitsgrad variabel auf. Dadurch werden die Rohrlängen gegenüber den (gleichmäßig weiten) Plattenkaskaden wesentlich kürzer.

Die Entwicklungsschritte zur Optimierung der Thermodiffusionskaskaden sind in Abb.33 dargestellt.

Abb.33 : Entwicklung der Thermodiffusionskaskaden

Elementareffekt

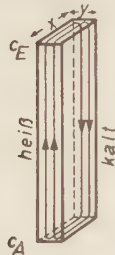


Enskog 1911
Chapman 1916

Vervielfachung, Kontinuierliche

Trennung:

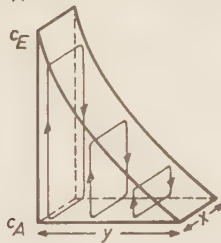
$x = \text{const}$
 $y = \text{const}$



Clusius 1938
Dickel 1938
Waldmann 1939

Optimale Plattenkaskaden:

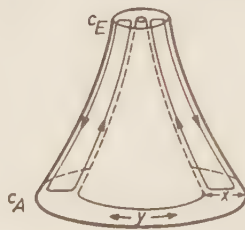
$x = \text{const}$
 $y = \text{variabel}$



Krasny-Ergen 1940
Jones, Furry 1946
Alexander 1960
Dickel 1963

Optimale Zylinderkaskaden:

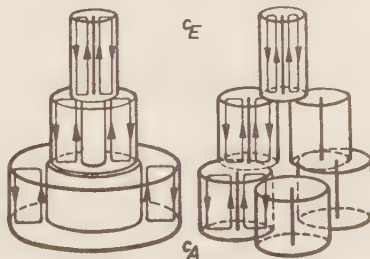
$x = \text{variabel}$
 $y = \text{variabel}$



David 1953
Diese Arbeit

Optimale Stufenkaskaden:

$x = \text{variabel}$
 $y = \text{variabel}$



V. PRAKTISCHE OPTIMIERUNG

26. Transformationseigenschaften

Die expliziten Bedingungen zur energetisch optimalen Kaskadierung des Isotopentrennrohrs lauten in universeller Form (55)(57):

$$\xi(c, \sigma) = \sqrt[4]{2\sigma \frac{c_E - c}{cc'} + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sigma(c_E - c)/cc'}}$$

$$\zeta(c, \sigma) = 4\sigma \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{2}{3}(c_E - c)}$$

Erfüllen die Werte von σ, ξ, ζ an jeder Stelle c der Anlage diese beiden Kaskadenbedingungen, so erhält man den optimalen Wirkungsgrad (48)

$$\eta_{th} = \left[\alpha^2 \frac{D\varphi}{8\lambda} \frac{R}{M} \frac{\Delta T}{T} \right] \frac{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{cc'} dc}{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + \frac{3}{4\sigma} \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{2}{3}(c_E - c)}}$$

Die drei dimensionslosen Parameter σ, ξ, ζ enthalten implizit den verwickelten Einfluß der zehn speziellen thermischen, hydrodynamischen und geometrischen Bestimmungsstücke ($\rho, \eta, D, \alpha, T_i, T_a, s, R_a - R_i, \frac{R_a}{R_i}, z$).

Dadurch kommt eine gewisse Vieldeutigkeit ins Spiel, die eine ganze Lösungsgesamtheit einschließt: Um einen Überblick über die gesamte Lösungsmannigfaltigkeit optimaler Trennrohrkaskaden zu gewinnen, muß man alle äquivalenten Kombinationen der zehn Bestimmungsstücke zusammenfassen, die in den Parametern σ, ξ, ζ enthalten sind.

Die Lösungen, die sich hiermit abzeichnen, lassen sich in zwei Problemgruppen ordnen:

1. Man kann für das gleiche Trenngas ($\alpha, \eta, \lambda, T_i, T_a = \text{const}$) diejenige Mannigfaltigkeit aller optimalen Kaskaden ($R_a - R_i, \frac{R_a}{R_i}, z, \rho = \text{variabel}$) aufsuchen, die ein gegebenes Trennproblem ($c_A, c_E, s = \text{const}$) mit optimalem Wirkungsgrad löst. Hierbei sucht man verschiedene Kaskadengeometrien für die gleiche Trennung derselben Substanz bei gleichem Energieverbrauch

("Transformation der Kaskade").

2. Man kann für die gleiche, fest vorgegebene Kaskadengeometrie ($R_a - R_i, \frac{R_a}{R_i}, Z = \text{fest}$ an jeder Stelle des Rohres) diejenigen Betriebsbedingungen ($\rho, T_i, T_a, c_A, c_E, \beta = \text{variabel}$) aufsuchen, die für ein anderes Trenngas ($\alpha, \eta, \lambda, D = \text{variabel}$) das Optimum des Wirkungsgrades liefern. Hierbei sucht man die optimalen Betriebsbedingungen zur Trennung verschiedener Substanzen in derselben Anlage ("Transformation der Substanz").

Beide Problemstellungen lassen sich mittels der universellen Optimalbedingungen (55)(57) einheitlich lösen. Hierzu fordert man die Invarianz folgender Größen:

$$\begin{aligned}\xi &= \text{invariant} \\ \zeta &= \text{invariant} \\ \sigma &= \text{invariant} \\ C_E &= \text{invariant}.\end{aligned}\tag{60}$$

In diese invarianten Parameter setzt man die speziellen thermischen, hydrodynamischen und geometrischen Bestimmungsstücke explizit ein. Man findet dann Invarianzbedingungen, die unendliche Mannigfaltigkeiten optimaler Kaskaden aufeinander abbilden bzw. durch Transformationen auseinander hervorgehen lassen.

Erst im Besitz dieser Transformationseigenschaften kann man dann von einer allgemeinen Lösung des Optimierungsproblems sprechen.

Wir diskutieren die Transformationen in der obigen Reihenfolge:

1. Transformation der Kaskade:

Gesucht ist die Dimensionierung aller optimalen Kaskaden ($R_a - R_i, \frac{R_a}{R_i}, Z, \rho = \text{variabel}$), welche dieselbe Trennung ($c_A, c_E, \beta = \text{const}$) desselben Gases ($\alpha, \eta, \lambda, T_i, T_a = \text{const}$) mit demselben optimalen Wirkungsgrad erzielen.

- a) Bei **L a b o r a n l a g e n** ($\sigma \lesssim 4$) folgen aus den vier Invarianzbedingungen (60) (mit der allgemeinen Näherung $D\varphi = 1/4\eta$ und der Druckunabhängigkeit von η und λ) die vier Transformationsbedingungen:

$$(R_a - R_i) \cdot \varrho^{2/3} = \text{invariant}$$

$$Z \cdot \frac{\varphi}{\psi} \cdot \varrho^{2/3} = \text{invariant}$$

$$\frac{\frac{R_a}{R_i} - 1}{\frac{R_a}{R_i} + 1} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \varrho^{2/3} = \text{invariant}$$

$$C_E = \text{invariant.}$$

Sie geben an, in welchem Verhältnis man bei Änderung des Trenndruckes $p \sim \varrho$ die geometrischen Abmessungen $R_a - R_i$, $\frac{R_a}{R_i}$, Z an jeder Stelle c der Kaskade abzuändern hat, wenn auch die neue Kaskade mit optimalem Wirkungsgrad betrieben werden soll.

- b) Bei **G r o ß a n l a g e n** ($\sigma \gg 1$) ist der Wirkungsgrad (48) unabhängig von der reduzierten Entnahme σ . Gleichzeitig vereinfachen sich nach Kap. 24 die beiden Optimalbedingungen (40)(41) auf die drei Kaskadengleichungen eines Plattenpaares ($\frac{R_a}{R_i} \approx 1$; $\varphi, \psi, \chi \approx 1$):

$$\xi = 2$$

$$\eta = 1 \frac{C_E - C}{CC'} \frac{1}{4R_0^4 h}$$

$$\zeta = 33 \ln \frac{C_E C_A}{C_E' C_A'}$$

Die Invarianzforderungen lauten dann

$$\xi = \text{invariant}$$

$$\eta = \text{invariant}$$

$$\zeta = \text{invariant}$$

$$C_E = \text{invariant.}$$

Man erhält, daraus die Transformationsbedingungen

$$x \cdot \varrho^{2/3} = \text{invariant}$$

$$y = \text{invariant}$$

$$z \cdot \varrho^{2/3} = \text{invariant}$$

$$C_E = \text{invariant.}$$

Sie geben an, in welchem Verhältnis man bei Änderung des Trenndruckes $p \sim \varrho$ die Spaltweite x , den mittleren Rohrrumfang y und die Rohrhöhe z an jeder Stelle c der Kaskade abzuändern hat, wenn auch die neue Kaskade mit optimalem Wirkungsgrad betrieben werden soll [21][23].

Für jedes Trennproblem ($c_A, c_E, s = \text{const}$) existiert also nicht nur eine einzige optimale Kaskade, sondern eine unendliche Mannigfaltigkeit von Kaskaden (mit dem kontinuierlich variablen Parameter ϱ). Alle haben denselben optimalen Wirkungsgrad.

2. Transformation der Substanz:

Gesucht sind die hydrodynamischen Betriebsbedingungen ($\varrho, T_i, T_a = \text{variabel}$) eines beliebigen binären Trenngases ($\alpha, \eta, \lambda, D = \text{variabel}$), welche die Trennung ($c_A, c_E, s = \text{variabel}$) in einer geometrisch fest vorgegebenen Trennröhrkaskade ($R_a - R_i, \frac{R_a}{R_i}, z = \text{fest an jeder Stelle des Rohres}$) mit optimalem Wirkungsgrad erzielen.

Hierzu werden die Invarianzforderungen (60) mittels der speziellen thermischen und hydrodynamischen Bestimmungsstücke in explizite Transformationsbedingungen umgerechnet.

$$\alpha \cdot \left(\frac{\eta}{\varrho} \right)^2 = \text{invariant}$$

$$\frac{s}{\eta} = \text{invariant}$$

$$\alpha \cdot \frac{\Delta T}{T} = \text{invariant}$$

$$C_E = \text{invariant.}$$

Sie geben an, in welchem Verhältnis man bei Vorgabe der druckunabhängigen Gaseigenschaften α, η, λ die freien Parameter $\varrho, T_1, T_a, c_A, c_E, s$ zu wählen hat, wenn man in einer fertig vorgegebenen Trennanlage andere Substanzen mit optimalem Wirkungsgrad trennen will.

Realisiert werden diese vier Transformationsbedingungen durch 1) Änderung des Trenndruckes, 2) der Entnahme s , 3) der Temperaturdifferenz ΔT , 4) des Einspeispunktes z (c_A).

Die mittlere Trenngasdichte ϱ und die Entnahme s sind innerhalb sehr weiter Grenzen leicht variierbar. Der Quotient $\frac{\Delta T}{T}$ ist dagegen nur im Intervall $0 \leq \frac{\Delta T}{T} \leq 2,5$ variabel. Infolgedessen sind die Transformationsmöglichkeiten beschränkt: Der Spielraum der transformierbaren α -Werte liegt in der Größenordnung des Faktors 2.⁺⁾

Die Transformierbarkeit verschiedener Gase ist also - wenn überhaupt - i. a. nur auf e i n e W e i s e möglich. Sie setzt voraus, daß der elementare Thermodiffusions-Trennfaktor (Kap.1) $\alpha \frac{\Delta T}{T}$ und die Konzentrationsverteilung $c(z)$ beim optimalen Betrieb in einem speziell optimierten starren Rohraufbau für jedes Trenngas unverändert bleibt. Die Gleichheit der Endkonzentrationen c_E am Entnahmeende ($z = 0$) wird erfüllt, wenn man an der Einspeisstelle ($z = Z$) das neue Trenngas mit derselben Anfangskonzentration c_A zuführt. Andernfalls wird die Kaskade entsprechend verlängert bzw. verkürzt. Wesentlich ist, daß man zur gleichen Konzentrationsverteilung $c(z)$ in den arbeitenden Teilen der Apparatur kommt. Dann bleibt der Nutzungsgrad für alle Trenngase invariant und der Wirkungsgrad wird optimal.

⁺⁾ Man wird also nicht in jedem Fall die von Dickel [28] angegebene Möglichkeit verifizieren können und "stets einen Weg finden, eine bestehende Anlage auf verschiedene Trennprobleme anzuwenden".

3. Ähnlichkeitstransformation:

Von praktischer Bedeutung für die Konstruktion von Trennrohrkaskaden ist die Verwendung experimentell ermittelter Transportfaktoren anstelle theoretisch berechneter Werte. Der Grund liegt darin, daß sich die Transportfaktoren (Kap.5, Kap.6) aus den gaskinetischen Größen $\alpha, D, \eta, \lambda, \rho$ wegen der oft komplizierten Temperaturabhängigkeit vielfach nur mit unzureichender Genauigkeit berechnen lassen. Für die praktische Anwendung ist es dann sicherer, ein kleines Probetrennrohr ($R_a - R_i = \text{const}$, $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$) mit dem interessierenden Isotopengemisch zu füllen und seine Trenneigenschaften (im entnahmefreien Betrieb) experimentell zu bestimmen: Aus der universellen Transportgleichung (3) $\tau = Hcc' - (K_k + K_d) \frac{dc}{dz}$ $= \xi_0 \xi^4 [cc' - L_0 (\xi^4 + \frac{2}{\xi^2}) \frac{dc}{dz}]$ und der Energiebeziehung $\dot{Q} = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln R_a/R_i} \cdot Z$ ergeben sich die charakteristischen Kenngrößen $s_0, R_0, L_0, \dot{Q}_0$ empirisch (Näheres siehe Anhang).

Die ganze komplizierte Gaskinetik ist dann in diesen vier Meßwerten zusammengefaßt. Sie wird in dieser Form in die Rechnung hineingesteckt [17].

Damit eröffnet sich die Möglichkeit, eine Ähnlichkeitstransformation von dem kleinen Probetrennrohr eines Modellversuches ($\sigma=0, \eta_a=0$) auf eine pyramidenförmige Zylinderkaskade der gewünschten Trennleistung ($\sigma>0$) mit optimalem Wirkungsgrad vorzunehmen:

Erfüllt man die Ähnlichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} p &= \text{invariant} \\ T_i, T_a &= \text{invariant} \\ \frac{R_a}{R_i} &= \text{invariant}, \end{aligned}$$

so bleiben für ein und dasselbe Trenngas die Kenngrößen

$$\begin{aligned} s_0 &= \text{invariant} \\ R_0 &= \text{invariant} \\ L_0 &= \text{invariant} \\ \dot{Q}_0 &= \text{invariant}. \end{aligned}$$

Die Dimensionierung $\xi, \eta, \zeta, \dot{a}$ der gewünschten optimalen Anlage läßt sich dann (nach Kap.20) unmittelbar angeben.

27. Energetisch optimale Stufenkaskaden

Bei der praktischen Realisierung des optimalen Kaskadenschemas sind die stetig veränderlichen geometrischen Variablen (Spaltweite $R_a - R_i$, Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$) durch Rohre mit stückweise konstantem Querschnitt zu ersetzen.

1. Bei G r o ß a n l a g e n ($\sigma \gg 1$) ist die gesuchte Lösung naheliegend: Man hat lediglich den stetig veränderlichen Verlauf der Rohrgeometrie treppenförmig zu approximieren (Abb.33). Anstatt zwei konzentrische Rohrmäntel zu bauen, bei denen sich der Wandabstand und der mittlere Mantelumfang vom Entnahmeende zum Einspeisende hin stetig ändern, schaltet man Einzelrohre von konstantem Querschnitt und einigen Metern Länge derart hintereinander, daß eine fein abgestufte Kaskade entsteht, die dem optimalen Transportverlauf $\frac{r}{r_A} \approx \frac{1}{2}$ möglichst nahek kommt.

Im größten Teil der Anlage (Pyramidenbasis für den erforderlichen Anfangstransport) haben alle Rohrabschnitte gleiche Trennspaltweite ($\xi = 2$). In der Nähe des Entnahmeendes (Pyramiden spitze für die erforderliche Trennschärfe) verringert sich die Trennspaltweite ($1 \leq \xi < 2$).

Die Basis dieser Stufenpyramide kann man statt aus umfangreichen monolithischen Rohrmänteln auch aus einer Vielzahl gleicher Einzelrohre ($\xi = 2, \frac{R_a}{R_i} = \text{const} \gg 1$) kolonnadenartig aufbauen. Dadurch ergibt sich eine experimentell leicht durchführbare Konstruktion aus gleichartigen Bausteinen. Sie werden durch konvektive Koppelkreise parallel- und hintereinandergeschaltet. Die Anzahl der parallel geschalteten Einzelrohre ist der Breitenfunktion y der Plattenkaskade (51) proportional. Die Höhe der hintereinandergeschalteten Anordnung ist (bei feiner Abstufung) gleich der Länge z der Plattenkaskade (52).

Der Aufbau aus vielen gleichartigen Einzelrohren hat Vorzüge

- a) Einmal angefertigte Bausteine kann man auch für andere Trennaufgaben verwenden. Man schaltet sie lediglich zu einem anderen Netzwerk optimal zusammen.
- b) Bei experimenteller Bestimmung der Kaskadenparameter R_o, L_o, s_o kann man in einer kleinen Modellanlage eine Ähnlichkeitstransformation der gefundenen Werte auf die gewünschte optimale Großanlage vornehmen (wegen $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$).

2. Bei den praktisch wichtigen L a b o r a n l a g e n (6.4) lautet das Problem im einfachsten Fall:

Gesucht ist die Dimensionierung derjenigen Kaskade, die bei konstantem Rohrquerschnitt eine gegebene Trennaufgabe ($c_A, c_E, s = \text{const}$) mit minimalem Energieverbrauch löst. Diese optimale Einstufenkaskade besteht aus einem einzigen gleichmäßig weiten Rohr. Die Transportfaktoren H, K bleiben längs der ganzen Ersatzkaskade konstant, da die Radien R_a, R_i fest sind.

Der Wärmestrom ist dann (22)

$$\dot{Q} = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot K \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{Hcc' - s(c_E - c)}.$$

Die Lösung des Variationsproblems

$$\dot{Q} = \min$$

$$s c_E = \text{const}$$

$$\xi = \xi(c_A, c_E, s) \leq 2$$

$$\frac{R_a}{R_i} = \text{const} > 1$$

liefert die optimale Rohrgeometrie. Man erhält für den konstanten Spaltabstand ξ_{const} und das optimale Radienverhältnis $\left(\frac{R_a}{R_i}\right)_{\text{const}}$ komplizierte transzendente Gleichungen, die sich nur numerisch auswerten lassen.

Hat man ξ_{const} , $\left(\frac{R_a}{R_i}\right)_{\text{const}}$ ermittelt, so kann man den Energieverbrauch der optimalen einstufigen Zylinderkaskade

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{const}} &= \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)_{\text{const}}} \cdot \int_{c_A}^{c_E} \frac{K_k \text{const} + K_d \text{const}}{H_{\text{const}} c c' - s(c_E - c)} dc \\ &= \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)_{\text{const}}} \left(\xi_{\text{const}}^4 + \frac{2}{\xi_{\text{const}}^2} \right) \cdot \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{\xi_{\text{const}}^4 c c' - 6(c_E - c)}\end{aligned}$$

mit dem Energieverbrauch der zugehörigen optimalen Zylinderkaskade nach Kap. 20

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{optimal}} &= \lambda \Delta T \int_{c_A}^{c_E} \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{K_k + K_d}{H c c' - s(c_E - c)} dc \\ &= \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \left[45 \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(c c')^2} dc + 3 \int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{c c' + \frac{5}{3}(c_E - c)} \right]\end{aligned}$$

vergleichen.

Ihr Verhältnis $\frac{\dot{Q}_{\text{optimal}}}{\dot{Q}_{\text{const}}}$ gibt die Güte der Einstufen-Approximation an.

- a) Im Grenzfall $\sigma = 0$ folgt aus der Bedingungsgleichung $\frac{\partial}{\partial \xi} \dot{Q} = 0$ in beiden Fällen $\xi_{\text{const}} = \xi_{\text{optimal}} = \text{const} = 1$. In beiden Fällen ergibt sich dieselbe Heizleistung

$$\dot{Q} = \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot 3 \ln \frac{c_E c'_A}{c'_E c_A}.$$

Der Wirkungsgrad erreicht dabei sein absolutes Minimum $\eta_{\text{th}} = 0$. Bei verschwindender Entnahme liefert die einfach gestufte Kaskadierung und die optimal zylindrische Kaskadierung denselben Rohrtyp, nämlich ein Zylinderrohr mit konstantem Querschnitt. Es hat gleichzeitig minimalen Energieverbrauch, maximale Trennschärfe, minimale Länge, minimalen Nutzungsgrad und minimalen Wirkungsgrad.

Dasselbe Ergebnis liefert die Optimierung von Waldmann [79] (1939). Sie beschränkt sich auf Rohre mit konstantem Querschnitt und gestattet eine Abschätzung der Leistungs-

fähigkeit von Einstufenkaskaden für $\sigma > 0$ (Kap. 7, Punkt 4). Die Quadratur der Einstufenkaskaden durch Dickel und Trötsch [25][26][30][27] führt im Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$ auf innere Widersprüche. Sie verliert dadurch auch im praktisch wichtigen Gebiet kleiner Anlagen ihre Gültigkeit.

- b) Für $0 < \sigma \ll \frac{1}{4}$ (kleine Laboranlage) gilt die Näherung

$$\dot{Q} = \lambda \Delta T \frac{2\pi L_0}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i/\text{const}}\right)} \cdot \left(\xi_{\text{const}}^4 + \frac{2}{\xi_{\text{const}}^2} \right) \cdot \left(\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'} + \frac{\sigma}{\xi_{\text{const}}^4} \int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc \right).$$

Aus der Optimalbedingung $\frac{\partial}{\partial \xi} \dot{Q} = 0$ folgt dann die Lösung

$$\xi_{\text{const}}^{10} - \xi_{\text{const}}^4 = 3\sigma \frac{\int_{c_A}^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc}{\int_{c_A}^{c_E} \frac{dc}{cc'}}.$$

Mit Hilfe der tabellierten Integrale (Abb. 13, Abb. 20) kann man den Bestwert der über die gesamte Kaskade konstanten Spaltweite ξ_{const} numerisch ermitteln.

- c) Für $\sigma \gg 0$ wird man mehrstufige Ersatzkaskaden ins Auge fassen. Die nähere Untersuchung zeigt:

Es kommt nicht so sehr auf eine möglichst feinstufige Annäherung an die kontinuierlich variable Dimensionierung an. Wesentlich ist die richtige Wahl der streckenweise konstanten mittleren ξ -Werte bzw. bei fest vorgegebener Anlage die richtige Wahl der Entnahme s.

28. Minimum der Anlaufzeit

Die Größenordnung der Anlaufzeit von Trennrohren bis zur gewünschten EndEinstellung ergibt sich aus der einfachen Überlegung von Kap. 7, Punkt 1 zu

$$t_0 \approx \frac{S}{H_A c_A c'_A} \int_{c_A}^{c_E} f \frac{K}{H} \frac{c - c_A}{cc'} dc.$$

Die Einstellungsgeschwindigkeit der Anlaufphase hängt davon ab, ob und wie man den Rohrquerschnitt f und damit die Transportfaktoren H, K längs der Trennanlage gestaltet.

Arbeitet man mit konstantem Rohrquerschnitt $f = x \cdot y$, so ergibt die Integration (mit der Abkürzung $q = \frac{c_E c_A'}{c_E c_A}$) die Anlaufzeit [2] (8)

$$t_0 \approx \frac{\rho x y K}{H^2 c_A c_A'} \int_{c_A}^{c_E} \frac{c - c_A}{c c'} dc \\ \approx \frac{\rho x y_A K_A}{H_A^2} \left\{ \frac{1}{c_A c_A'} \left[\ln(1 + c_A(q-1)) - c_A \ln q \right] \right\}.$$

Wegen des Produktgliedes $c_A c_A'$ im Nenner muß man demnach bei der Darstellung seltener Isotope ($c_A \ll 1$) extrem lange Anlaufzeiten in Kauf nehmen. Dieser Nachteil macht sich besonders bei der Gewinnung kleinerer Isotopenmengen in Laboranlagen entscheidend bemerkbar: Man hat den Energieverbrauch während der langen Anlaufphase zum Energieverbrauch während der eigentlichen Entnahmephase dazuzurechnen und in der Abschätzung des Wirkungsgrades entsprechend zu berücksichtigen.

Dadurch tritt die Frage nach der kürzesten Anlaufzeit in den Vordergrund.

Arbeitet man mit einer Plattenkaskade^{*)}, so ist wegen des pyramidenförmigen Aufbaus die Querschnittsform $f = x \cdot y$ längs z variabel. Die Integration ergibt dann für die Anlaufzeit die Größenordnung [2]

$$t_0 \approx \frac{\rho x y_A K_A}{H_A^2} \left\{ 4 \left[\frac{q+1}{2(q-1)} \ln q - 1 \right] \right\}.$$

^{*)} Da hier nur die Größenordnung von t_0 abgeschätzt wird, beschränken wir uns auf die einfacheren Rechenausdrücke der energetisch optimalen Plattenkaskade nach Kap. 17, Gl. (28) (29) als Näherung der Zylinderkaskade.

Sie hängt im Gegensatz zur Anlaufzeit bei konstantem Rohrquerschnitt konzentrationsmäßig nicht mehr von der Anfangskonzentration c_A ab, sondern nur noch vom Endtrennfaktor q . Außerdem ist sie unabhängig von der vorgesehenen Sollentnahme s der Anlage.

Als freie Variable tritt in beiden Fällen noch die Spaltweite $x \sim \xi$ auf. Der x -abhängige Ausdruck $\frac{x(K_A + K_d)}{H^2} \sim \xi^2 \left(1 + \frac{2}{\xi^6}\right)$ ist in Abb.30 als Funktion von ξ graphisch dargestellt.

Arbeitet man mit konstanter Spaltweite, so erhält man ein Minimum bei $\xi = \sqrt[6]{4} = 1,26$. Es ist im Bereich $1 \leq \xi \leq 2$ nicht sehr stark ausgeprägt.

Zum direkten Vergleich sind die konzentrationsabhängigen geschweiften Klammerausdrücke (ϑ) für Rohre mit konstantem Querschnitt und für Plattenkaskaden mit pyramidenförmigem Rohraufbau in Abb.34 (nach Alexander[2]) graphisch dargestellt. Danach ist die Einstellzeit der Plattenkaskaden im kritischen Bereich kleiner Anfangskonzentrationen c_A und großer Endtrennfaktoren q um Größenordnungen kleiner ist als für Rohre mit konstantem Querschnitt.

Die energetisch optimale Pyramidenform hat also gegenüber dem gleichmäßig dimensionierten Rohr den zusätzlichen Vorteil höherer Einstellgeschwindigkeit.

Berechnet man umgekehrt eine Rohrgeometrie, die bei hohem Trennfaktor im entnahmefreien Betrieb das Minimum der Anlaufzeit erzielen soll, so ergeben sich Rohrformen, die meist nur wenig von der energetisch optimalen Pyramidenform abweichen. Nach der allgemeinen Kaskadentheorie von Cohen[15] haben ideale, ohne Rückvermischung arbeitende Kaskaden gleichzeitig mit dem Minimum des Energieaufwands die Eigenschaft minimaler Anlaufzeit. Das Prinzip der Arbeitsteilung durch einen weiten Anfangsteil und einen engen Endteil gilt demnach sowohl für die Optimierung der Heizleistung als auch für die näherungsweise Optimierung der Anlaufzeit.

Dieser Zusammenhang wurde schon bei den Experimenten von Clusius und Dickel[12][13] zur Trennung von Spurenisotopen durch entsprechende Dimensionierung der Rohre berücksichtigt.

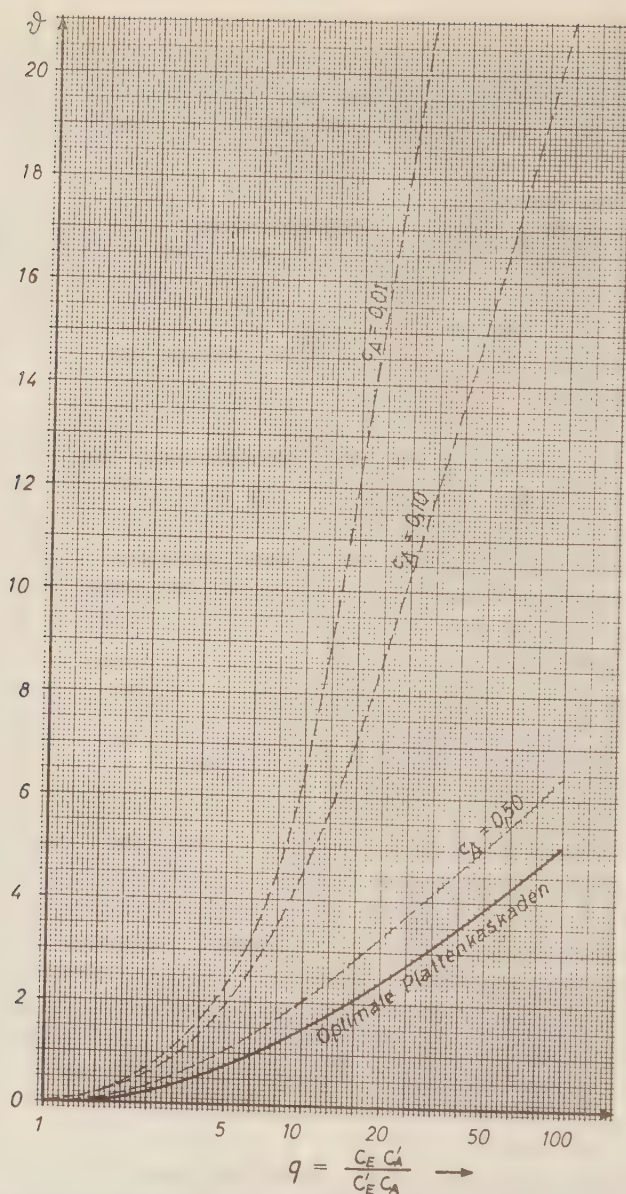


Abb.34 : Die Anlaufzeit für Trennröhre mit konstantem Querschnitt (gestrichelt) und für energetisch optimale Plattenkaskaden (ausgezogen) als Funktion des Trennfaktors $q = \frac{C_E C_A}{C_E C_A}$. (Nach Alexander [2])

Der Grundgedanke der optimalen Kaskadierung des Trennrohrs — gleichzeitige Variation der Spaltweite und der Spaltbreite — tritt also auch bei der Optimierung der Anlaufzeit wieder auf: "Je enger das Trennrohr ist (ohne $\xi = 1$ zu unterschreiten), um so größer ist die Konzentrationsverschiebung, um so geringer aber die Einstellungsgeschwindigkeit. Zweckmäßigerweise wird man die Anreicherung in zwei oder mehr Stufen vornehmen. Man wird daher einen Teil der Apparatur auf kleine Konzentrationsunterschiede bei großer Einstellungsgeschwindigkeit einrichten (Anfangsteil, $\xi > 1$) zur Gewinnung mäßig angereicherten Gases in großer Menge, in weiteren Stufen wird man höheren Konzentrationsunterschied bei geringerer Menge anstreben (Endteil, $\xi = 1$)". (Fleischmann 1940[35]).

VI VERGLEICH VON THEORIE UND EXPERIMENT

29. Anlaufzeit

Zur experimentellen Prüfung der theoretischen Ergebnisse untersucht man die Abhängigkeit der erzielten Konzentrationsverschiebung von den frei wählbaren Versuchsbedingungen

Zeit t

Druck p

Spaltweite x

Rohrlänge Z

Anfangskonzentration c_A

Entnahme s

Heizleistung $\dot{Q}$.

Wir diskutieren die Zusammenhänge in dieser Reihenfolge anhand von Experimenten aus der einschlägigen Literatur.

Die Abhängigkeit der Konzentrationsverschiebung von der Zeit ermöglicht eine Prüfung der allgemeinen zeitabhängigen Transportgleichung (7). Sie beschreibt das räumliche und zeitliche Zusammenwirken der Strömungen im Trennprozeß.

Bardeen[3] verglich seine Lösung mit Messungen von Nier [60] an einem Zylinderrohr. Das Rohr hatte konstanten Querschnitt. Es war oben (o) und unten (u) abgeschlossen.

In Abb. 35 ist der erzielte Trennfaktor $\frac{c_o c_u}{c_o c_u}$ als Funktion der Trennzeit t mit dem Trenndruck p als Parameter aufgetragen.

Man erkennt, daß die relative Konzentrationsverschiebung zwischen den beiden Rohrenden anfänglich das Wurzelgesetz $\sim \sqrt{t}$ (Debye) befolgt. Sie geht dann asymptotisch in einen exponentiellen Sättigungswert $\sim (1 - e^{-t/t_0})$ (Waldmann) über. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist sehr gut. Man sieht außerdem, daß für den Parameter des Trenndruckes p ein Maximum existiert.

30. Trennschärfe

1. Die Abhängigkeit der Trennschärfe eines entnahmefrei betriebenen stationären Trennrohrs vom D r u c k ermöglicht die schärfste Prüfung der Theorie des hydrodynamischen Verstärkungsmechanismus.

$$\text{Es gilt } \ln \frac{c_o c'_u}{c'_o c_u} = Z \frac{H}{K_k + K_d} = \frac{ap^2}{p^4 + b} \quad (\text{Kap. 9, Abb. 11}).$$

Bowring [8] untersuchte diesen Zusammenhang bei der Anreicherung von $^3\text{He}/^4\text{He}$ in einem Zylinderrohr. Es ergab sich die in Abb. 36 dargestellte Druckabhängigkeit. Zwei Meßpunkte wurden zur Normierung der beiden Koeffizienten a, b herangezogen. Alle sechs übrigen Meßpunkte sind dann durch einen Kurvenzug A verbunden.

Raman und Saxena [68] berechneten diesen Verlauf theoretisch. Sie nahmen für das relativ einfach gebaute He-Atom geeignete Potentialmodelle an. Aus den Stoßintegralen der Boltzmann-Gleichung erhielten sie die Gaskoeffizienten $\lambda(T), \eta(T), D(T), \alpha(T)$. Daraus gewannen sie die Transportfaktoren H, K_k, K_d und die Formfaktoren φ, ψ, χ :

Kurve B gilt für ein Maxwell-Gas unter der Annahme eines temperaturunabhängigen α ; Kurve C gilt für das Lennard-Jones-(12-6)-Potential. Die quantitative Übereinstimmung dieser aus Molekülmodellen berechneten Trennschärfe mit dem Experiment ist überraschend gut.

Auch bei komplizierter gebauten Molekülen verifiziert man den Verlauf über ein ausgeprägtes Maximum experimentell sehr leicht. Bei der quantitativen Vorausberechnung von Höhe und Lage des Maximums treten aber Schwierigkeiten auf. Der Grund ist die oft mangelhafte Kenntnis der Temperaturfunktionen $\lambda(T), \eta(T), D(T), \alpha(T)$.

Zusätzlich können parasitäre Rückvermischungseffekte auftreten und die Trennschärfe verringern. Letztere beruhen auf kleinen Asymmetrien und Irregularitäten, die im realen Trennrohr unvermeidbar sind: Abweichungen von der exakt vertikalen Stellung der Rohre, Erschütterungen, Schwingungen,

Vergleich von Theorie und Experiment:

Abb. 35 : $Z = 7,3 \text{ m}$; $R_a = 1,75 \text{ cm}$;
 $R_1 = 9,5 \text{ mm}$; $T_1 = 300^\circ \text{C}$; $c_A = 1,10 \%$.

Abb. 36 : $Z = 4,5 \text{ m}$; $R_a = 1,50 \text{ cm}$;
 $R_1 = 4,0 \text{ mm}$; $T_1 = 680^\circ \text{C}$; $c_A = 10^{-4} \%$.

Abb. 37 : $Z = 3,0 \text{ m}$; $R_a = 1,0 \text{ cm}$;
 $R_1 = 0,26 \text{ mm}$; $T_1 = 1680^\circ \text{C}$; $c_A = 0,35 \%$.

Abb. 38 : $Z = 0,93 \text{ m}$; $p = 710 \text{ Torr}$;
 $R_1 = 0,15 \text{ mm}$; $T_1 = 770^\circ \text{C}$; $c_A = 21,0 \%$.

Abb. 39 : $Z = 36 \text{ m}$; $R_a = 0,42 \text{ cm}$;
 $R_1 = 0,2 \text{ mm}$; $T_1 = 690^\circ \text{C}$; $c_A = 24,3 \%$.

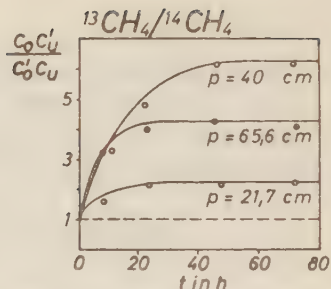


Abb. 35 : Trennfaktor zwischen den Rohrenden als Funktion der Zeit t . (Theorie: Bardeen[3], Experiment: Nier[60]).

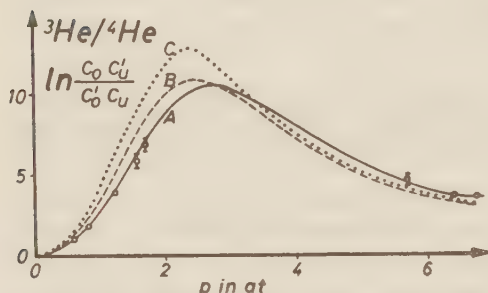


Abb. 36 : Trennschärfe als Funktion des Druckes p . (Theorie: Saxena, Raman[68], Experiment: Bowring[8]).

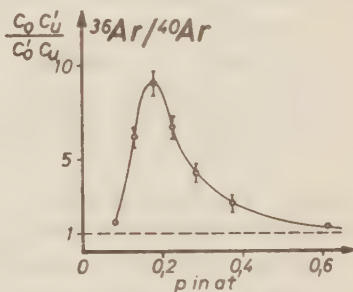


Abb. 37 : Trennfaktor als Funktion des Druckes p . (Nach Donaldson und Watson[32]).

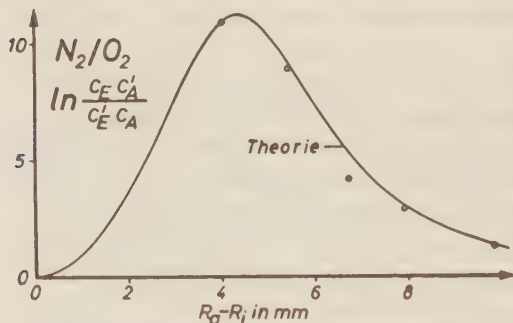


Abb. 38 : Trennfaktor als Funktion der Trennspaltweite $R_a - R_1$. (Theorie: Waldmann[79], Experiment: Clusius und Dickel[10]).

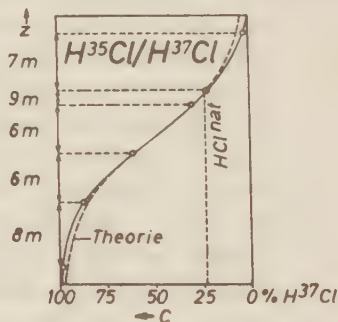


Abb. 39 : Konzentration c als Funktion der Rohrlänge z . (Nach Clusius und Dickel[10]).

azimutale und zeitliche Schwankungen der Spaltweite, mangelhafte azimutale und axiale Temperaturkonstanz, Einfluß der Zentrierhalterung usw.

Ihr summierter Einfluß gibt Anlaß zu einer zusätzlich überlagerten, quantitativ schwer überschaubaren konvektiven Störströmung, welche die Trennschärfe verringert. Furry, Jones, Onsager[40] brachten sie in der Transportgleichung (3) durch ein negatives Zusatzglied $K_p \cdot \frac{dc}{dz}$ in Rechnung. Bei Berücksichtigung dieses halbempirischen parasitären Transportfaktors $K_p \sim p^4$ gelingt es dann, den theoretischen Verlauf der Trennschärfe $\ln \frac{c_0 c_u}{c_0 c_u} = Z \frac{H}{K_R + K_d + K_p} = \frac{ap^2}{(1+c)p^4 + b}$

mit dem experimentellen Befund in Einklang zu bringen. Abb. 37 zeigt eine Messung von Donaldson und Watson [32] an einem Drahtrohr zur Anreicherung von $^{36}\text{Ar}/^{40}\text{Ar}$. Durch Wahl eines geeigneten Wertes von $K_p = cp^4$ läßt sich ein theoretischer Kurvenverlauf finden, der alle Meßpunkte verbindet.

2. Die Abhängigkeit der Trennschärfe von der Trennsplattweite zeigt den Verlauf $\ln \frac{c_0 c_u}{c_0 c_u} = \frac{ax^3}{x^2 + bx}$. Er ist dem des Druckes sehr ähnlich (Kap. 9) Im Unterschied zur Druckvariation treten aber noch die geometrischen Formfaktoren mit ins Spiel. Ihre Berücksichtigung bewirkt eine systematische Modifizierung des Kurvenverlaufs, wenn man vom Plattenrohr über das Zylinderrohr zum extrem zylindrischen Drahtrohr übergeht. Abb. 38 zeigt den theoretischen Verlauf für das Plattenrohr.

Eingezeichnet sind Meßpunkte von Clusius und Dickel [10] an einem Drahtrohr. Die Koeffizienten a, b der theoretischen Kurve sind an zwei Meßpunkte angepaßt. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist bezüglich der Höhe und Lage des Maximums gut.

3. Die Abhängigkeit der Trennschärfe von der Rohrlänge wurde von Clusius und Dickel [10] untersucht. Sie bestimmten die Konzentrationsverteilung $c(z)$ in einem 36 m langen Drahtrohr mit konstantem Querschnitt. In Abb. 39 ist die Konzentration c in Abhängigkeit von der Rohrlänge aufgetragen. Die Übereinstim-

mung von Theorie und Experiment ist im mittleren Konzentrationsbereich gut. Die Werte der Transportfaktoren sind an die Meßpunkte des Mittelstücks angepaßt. Die Abweichungen an den beiden Rohrenden rühren daher, daß hier der Konzentrationsgradient $\frac{dc}{dz}$ am steilsten verläuft. Die Konzentrationsschichtung ist daher gegen parasitäre Strömungen am anfälligsten. Das 9 m-Anfangsstück hat eine größere Spaltweite und höhere Temperatur als die übrigen Rohre. Es ist daher bezüglich der Trennschärfe nicht optimal dimensioniert (aus Gründen, die in Kap.32 verständlich werden). Seine effektive Länge ist entsprechend kleiner und (quantitativ umgerechnet) verkürzt eingezeichnet.

4. Das experimentelle Ergebnis zeigt, daß der Thermodiffusionsfaktor α nicht von der Konzentration c abhängt. Dieser Befund ist in Übereinstimmung mit der gaskinetischen Theorie für isotope Systeme [80]. Damit ist die Integrierbarkeit der Transportgleichung (3) gerechtfertigt. Seaborg, Wahl und Kennedy [69] untersuchten die Trennschärfe bei extrem niedrigen Konzentrationen $c_A \approx 10^{-9}\%$ Tritium in Deuterium an einen Drahtrohr. Sie erwies sich als praktisch unabhängig von der Konzentration. Die Trennrohrgesetze behalten also auch bei Spurenkonzentrationen ihre Gültigkeit.

31. Transport

Die Abhängigkeit des Transports vom Entnahmestrom eines kontinuierlich arbeitenden Trennrohrs wird durch die stationäre Transportgleichung (3) beschrieben. Die Lösung hängt wesentlich davon ab, wie man den Rohrquerschnitt entlang der Trennanlage gestaltet.

Im einfachsten Fall läßt man den Querschnitt an jeder Stelle des Rohres konstant. Die Integration ergibt dann die Lösung von Waldmann (10). Hengevoss und Fleischmann [39] untersuchten sie experimentell an einem kurzen Drahtrohr mit Luft als Modellgas. Abb. 40 zeigt die erzielte Entnahmekonzentration c_E als Funktion der Entnahme s . Der theoretische Verlauf nach Waldmann [79] ist zur Gewinnung der Faktoren H, K an die beiden Meßpunkte 1,4

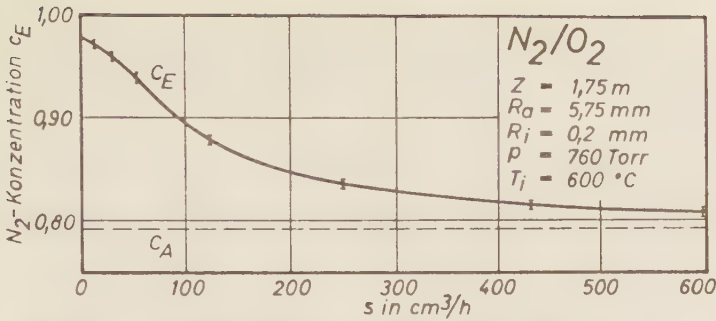


Abb.40 : Entnahmekonzentration c_E als Funktion des Entnahmestroms s für ein kurzes Drahtrohr mit konstantem Querschnitt. (Nach Hengevoss und Fleischmann [39]).

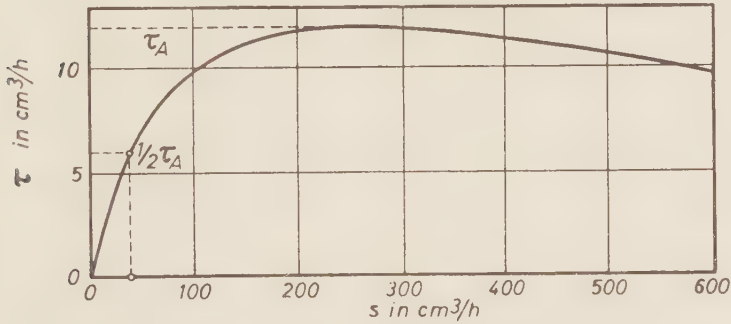


Abb.41 : Eigentransport $\tau = s(c_E - c_A)$ als Funktion des Entnahmestromes s . (Berechnet aus Abb.40).

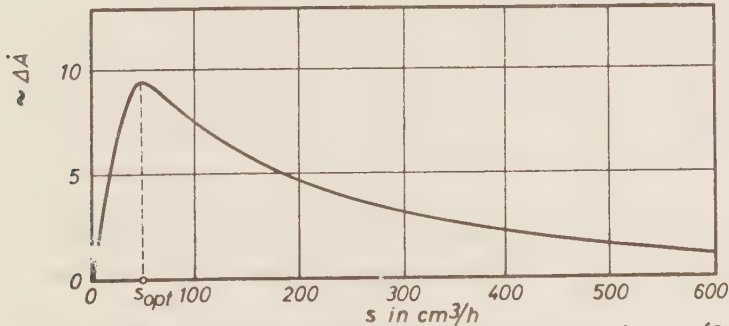


Abb.42 : Differentielle Trennleistung $\Delta \dot{A} \sim \tau \frac{\Delta c}{c \bar{c}'} = s \frac{(c_E - c_A)^2}{\bar{c} \bar{c}'}$ als Funktion des Entnahmestroms s . (Berechnet aus Abb.40).

angepaßt. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist sehr gut; erst bei großen Entnahmen tritt eine geringe Abweichung auf.

Man sieht das charakteristische Maximum der Trennschärfe bei $s = 0$ (Kap.9, Punkt 1).

Zur weiteren Auswertung dieser Messung bestimmt man den durch das Rohr fließenden Eigentransport $\tau = s(c_E - c_A)$; er ist in Abb.41 als Funktion der Entnahme s aufgetragen. Man sieht den charakteristischen Sättigungsverlauf zum Grenzwert τ_A hin (Kap.7, Punkt 3). Daraus läßt sich der Anfangstransport bestimmen. Er stimmt mit dem von Hengevoss und Fleischmann auf andere Weise gewonnenen Wert innerhalb der Meßgenauigkeit überein. Man kann die Messung weiter auswerten und aus Transport und Trennschärfe die erzielbare Trennleistung bestimmen:

Da ein ziemlich kurzes Trennrohr vorliegt und die Konzentrationsverschiebungen $\Delta c = c_E - c_A$ nur relativ klein sind, kann man die Versuchsanordnung als differentiellcs Trennelement wie in Kap.10 betrachten. Seine differentielle Trennleistung $d\dot{A} \sim \sim \tau \frac{\Delta c}{\Delta c'} = s \frac{(c_E - c_A)^2}{\Delta c'}$ ist in Abb.42 als Funktion der Entnahme s aufgetragen. Die differentielle Trennleistung durchläuft ein steiles Maximum. Der Entnahmewert s_{opt} liegt gerade dort, wo der Transport τ die Hälfte des Anfangstransportes τ_A erreicht. Damit ist die differentielle Optimalbedingung (13) $\frac{\tau}{\tau_A} \approx \frac{1}{2}$ für die Trennleistung kurzer Rohrstücke experimentell gut bestätigt.

32. Wirkungsgrad

Zur experimentellen Bestimmung des optimalen Wirkungsgrades untersuchen wir die klassischen Experimente von Clusius und Dickel [10] [12]. Wir zeigen, daß sie bei der Reindarstellung der Chlorisotope bereits empirisch nahezu das Optimum des Wirkungsgrades für Laboranlagen erzielt haben.

1. Clusius und Dickel (1939) führten bei dieser erstmaligen vollständigen Isotopentrennung zunächst Vorversuche zur Bestimmung der maximalen Trennschärfe aus. "Der Gasdruck (wurde) so gewählt, daß im entnahmefreien Zustand die optimale Trennschärfe erreicht wurde" [19]. Zur anschließenden Gewinnung der Reinisotope (99,4%) in Mengen von einigen

Gramm wurden mehrere "Versuchsreihen durchgeführt, bei denen verschiedene Schaltungen der Trennröhre ausprobiert wurden". Ein weiter Anfangsteil hatte den Zweck, "eine Steigerung des Transportes bei den niedrigen Konzentrationen zu erreichen". Versuche über das Absinken der Trennschärfe mit wachsender Entnahme ergaben, daß "täglich nur 8 bis 9 cm³ entnommen werden durften, damit keine Verschlechterung der Trennschärfe eintrat" [10].

2. Steinwedel [73] untersuchte (1942) theoretisch, inwieweit diese Chlortrennung optimal war. Das Problem wurde planparallel ohne radiale Formfaktorkorrektur für konstanten Rohrquerschnitt⁺⁾ behandelt ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{variabel}$). Unter diesen Voraussetzungen ergibt die Rechnung (mit $\alpha = 0,009$) nur etwa ein Zwölftel des experimentellen Energieverbrauchs. Steinwedel kommt zu dem Ergebnis: "Der Gasstrom (s) war nicht für den geringsten Wärmeverbrauch optimal gewählt".
3. Dickel [19] untersuchte (1951) den Wirkungsgrad bei der kontinuierlichen Trennung theoretisch. Beim Vergleich seiner Rechnung mit den Experimenten findet er eine "ungeklärte Diskrepanz" "um 1 bis 2 Zehnerpotenzen".
4. Watson [81] (1952) kommt (ohne Rechnung) zu der "Überzeugung, daß durch sorgfältige Konstruktion und Beachtung ... (experimentiertechnischer Verbesserungsvorschläge) die Diskrepanz zwischen dem berechneten und beobachteten Wirkungsgrad nach Dickel sehr beträchtlich verringert werden kann".
5. Dickel und Trötsch [24] (1964) optimierten planparallel ($x = \text{const}$, $y = \text{variabel}$) mit radialen Formfaktorkorrekturen. Sie stellen die Möglichkeit in Aussicht [19], "bei geeigneter Dimensionierung den Wirkungsgrad des Trennröhres noch erheblich zu steigern": "Mit Hilfe der neuen Theorien [21][23][24] wäre es möglich, den Energieverbrauch (der früheren Versuchsanlagen [10][12][13]), um 1 bis 2 Zehnerpotenzen zu verringern" [24], dabei den "älteren Staffelanlagen ... die optimalen Arbeitsbedingungen nicht eingehalten wurden" [29].

⁺⁾ Vgl. Kap. 7, Punkt 4

Speziell die Chlortrennung sollte nur ein Zehntel des früheren Energieverbrauchs erfordern.

6. Die vorliegende Theorie optimiert zylindrisch ($x = \text{variabel}$, $y = \text{variabel}$) mit radialen Formfaktoren. Zur Berechnung der Optimalkaskade für die Chlortrennung sind in Tab.1 die Daten zusammengestellt. Zum direkten Vergleich wird die Dimensionierung a. der experimentellen Versuchsanordnung, b. der zylindrischen Optimalkaskade, c. der planparallelen Optimalkaskade angegeben und in Abb.43 gegenübergestellt.

Tab.1: Berechnung einer Optimalkaskade zur Reindarstellung des Isotops ^{37}Cl aus der natürlichen Mischung $\text{H}^{35}\text{Cl}/\text{H}^{37}\text{Cl}$.

Trennproblem	$c_A = 24,3 \%$ $c_E = 99,4 \%$ $s = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ g s}^{-1} \triangleq 8 \text{ cm}^3 \text{ d}^{-1}$
Arbeitsbedingungen ^{+))}	$R_a = 4,2 \text{ mm}$ (Anfangsteil 6,4 mm) $R_1 = 0,2 \text{ mm}$ $\frac{R_a}{R_1} = 21$ $T_1 = 690 \quad ^\circ\text{C}$ $T_a = 30 \quad ^\circ\text{C}$ $p = 720 \quad \text{Torr}$
Gaskinetische Größen bei $\bar{T}$ ^{+))}	$\bar{T} = 420 \quad ^\circ\text{K}$ $\bar{\rho} = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$ $\bar{\eta} = 2,06 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ $\bar{D} = 0,27 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ $\bar{\alpha} = 3 \cdot 10^{-3}$ $\varphi = 1,5 \quad \psi = 1,8$

Hilfsgrößen^{+) .}

$R_o = 3,1 \text{ mm}$

$L_o = 1,6 \text{ m}$

$s_o = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ g s}^{-1}$

$\sigma = 0,07 \quad n = 0,11$

Heizleistung:

a. Experiment

$\dot{Q}_{\text{exp}} = 2,0 \text{ kW}$

b. Zylinderkaskade

$\dot{Q}_{\text{zyl}} = 1,8 \text{ kW}$

c. Plattenkaskade

$\dot{Q}_{\text{plan}} = 0,2 \text{ kW}$

Dimensionierung

an der Stelle c

$c = 99,4 \%$

88%

62%

31%

24,3%

Spaltweite:

a. Experiment

$R_a - R_1 = 4,0$

4,0

4,0

6,2

6,2 mm

b. Zylinderkaskade

$R_a - R_1 = 3,10$

3,19

3,24

3,37

3,44 mm

c. Plattenkaskade

$x = 6,2$

6,2

6,2

6,2

6,2 mm

Spaltbreite:

a. Experiment

$y = 13,8$

13,8

13,8

20,7

20,7 mm

b. Zylinderkaskade

$y = 10,7$

11,0

11,2

11,6

11,9 mm

c. Plattenkaskade

$y = 0$

0,29

0,44

0,88

1,2 mm

Rohrlänge:

a. Experiment

$z = 0$

8,0

14,0

20,0

29,0 m

b. Zylinderkaskade

$z = 0$

16

24

30

32 m

c. Plattenkaskade

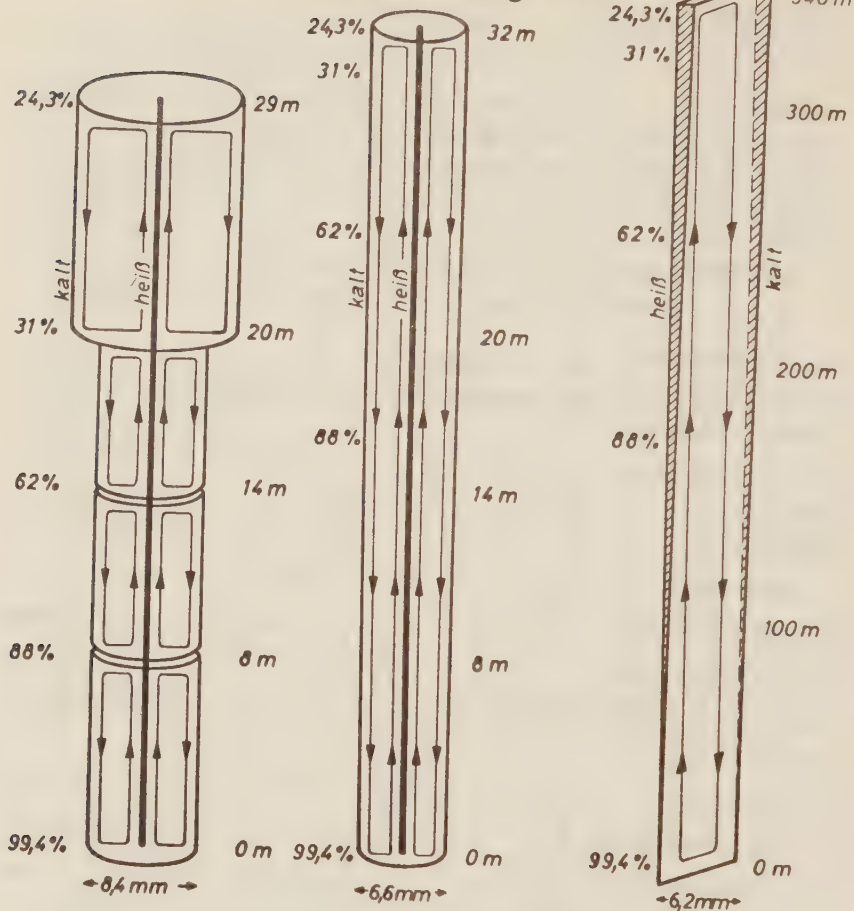
$z = 0$

170

250

320

340 m

Einspeisung HCl^{nat} Entnahme H^{37}Cl

a

Experiment

(Clusius, Dickel 1939)

b

Theorie

(diese Arbeit)

c

Theorie

(Dickel 1964)

Abb.43 : Optimale Trennröhrkaskaden zur Reindarstellung des Chlorisotops ^{37}Cl aus der natürlichen Mischung von H^{35}Cl / H^{37}Cl mit einer Produktionsrate von $8 \text{ cm}^3/\text{Tag}$. Der zugehörige Abreicherungsteil für ^{35}Cl ist nicht eingezeichnet.

- Abb.43 a :** Experimentelle Trennanlage von Clusius und Dickel [10]: Die Versuchsanlage bestand aus einer Stufenkaskade mit erweitertem Anfangsteil zur Steigerung des Anfangstransportes und einem Endteil höchster Trennschärfe. (Konzentrationsschichtung siehe auch Abb.39).
- b :** Optimale Zylinderkaskade nach der vorliegenden Theorie : Der erweiterte Anfangsteil zur Steigerung des Anfangstransportes geht stetig in einen Endteil höchster Trennschärfe über. Dadurch ändern sich die Konzentrationsschichtung und die Rohrlänge etwas im Vergleich zur gestuften Versuchsanlage von Clusius und Dickel.
- c :** Optimale Plattenkaskade nach der Theorie von Dickel [28]: Der Trennspalt hat eine konstante Weite von 6,2 mm. Die Plattenbreite nimmt von 1,2 mm am Einspeisende auf Null am Entnahmeende stetig ab. Die Rohrlänge ist im Vergleich zu den beiden Zylinderrohren a,b 10 - fach verkleinert aufgetragen. Es ist physikalisch unmöglich, die seitlich randlosen Trennplatten zu realisieren. Es ist geometrisch unmöglich, das millimeterbreite "Plattenpaar" zylindrisch "aufzurollen".

Die Rechnung ergibt:

Die optimale Zylinderkaskade nach der vorliegenden Theorie stimmt in ihrer Dimensionierung (Heizleistung, Spaltweite, Spaltbreite, Rohrlänge) nahezu mit der experimentellen Versuchsanordnung überein⁺⁺).

+) Bemerkungen:

ρ nach Dickel in [7], Tab.V.

$\bar{T} = T_a + 0,18 \Delta T$ nach Fleischmann und Jensen [37], S.143.

$\bar{\eta}$ interpoliert aus Trautz und Narath [75], Tab.5a.

$\bar{D}$ aus $Dg/\eta = 1,32$ nach Waldmann [80], Tab.13.

$\bar{\alpha}$ Mittelwert aus den Daten von Vasaru [77], S.87

($\alpha = 1,9 \cdot 10^{-3}$ bei $\bar{T} = 420^\circ K$) und Jones, Furry [50], S.218

($\alpha = 1,99 \cdot 10^{-3}$ bzw. $\alpha \geq 4,8 \cdot 10^{-3}$).

φ, ψ nach Jones und Furry [50] für ein Maxwell-Gas mit $R_a/R_1 = 21$,

$T_1/T_a = 3$; vgl. Abb. 5 dieser Arbeit. HCl kann nach

Jones und Furry [50], S.217 mit einiger Genauigkeit als

Maxwell-Gas behandelt werden.

R_o ist nach Fleischmann und Jensen [37], S.142 mit dem radialen

Korrekturfaktor 1,28 multipliziert.

$\dot{Q}_{exp}, \dot{Q}_{plan}$ nach Dickel und Trötsch [24], Tab.4.

$\dot{Q}_{zyl} = \dot{Q}_{plan}/n$ ohne Berücksichtigung der Wärmestrahlung.

⁺⁺⁾ Wesentlich sind hierbei nur die Größenordnungen, da bei der Wahl der gaskinetischen Größen Mittelwerte und idealisierende Annahmen für ein Maxwell-Gas zugrunde liegen.

Die optimale Plattenkaskade nach der Theorie von Dickel fällt demgegenüber stark aus dem Rahmen. Ihre fiktive Konstruktion läßt nur scheinbar eine Verringerung der Heizleistung um eine Zehnerpotenz erwarten.

Das klassische Experiment von Clusius und Dickel hatte in diesem Fall bereits empirisch nahezu das Minimum der Heizleistung und damit das Maximum des Wirkungsgrades für Laboranlagen erreicht.

7. Clusius, Dickel und Becker [12][13] lösten auch das weit schwierigere Problem der Reindarstellung von $^{18}\text{O}_2$, $^{14}\text{N}^{15}\text{N}$. Wegen der sehr kleinen Anfangskonzentrationen bauten sie eine Laboranlage von 82 m Rohrlänge. Sie erzielten eine 10^5 -fache Verstärkung des Elementareffekts mit einer Produktion von einigen cm^3/Tag . Um eine möglichst wirksame Trennung zu erzielen, wurden "die Rohre ... so ausgesucht, daß ihre stets vorhandene konische Beschaffenheit ein allmähliches Engerwerden der Trenneinheiten von oben (Einspeisende) nach unten (Entnahmeende) bewirkt". Der Trenndruck war so gewählt, daß das Entnahmeende mit höchster Trennschärfe arbeitete.

Auch hier sind also weitgehend die Voraussetzungen der zylindrischen Optimaltheorie für eine Trennung mit geringer Entnahme bei hoher Reinheit und kurzer Anlaufzeit erfüllt. Der optimale Wirkungsgrad liegt auch hier weit unter Dickels theoretischem Rechenergebnis.

8. Dickel und Trötsch [24][25][26][76] (1964) berücksichtigten bei ihrer planparallelen Optimierung die Theorie der parasitären Störströme [20]. Hierzu dienen zwei "Korrekturfaktoren, welche auf Grund der Theorie der parasitären Ströme eingeführt und abgeschätzt werden können. Sie sollen eine quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ermöglichen, können aber nur experimentell ... genauer bestimmt werden" [76]. Zur Schließung der Lücke zwischen Theorie und Experiment bemerkt Trötsch: "Wenn man ... bei der theoretischen Berechnung die parasitären Ströme berücksichtigt, kann man den Wirkungsgrad praktisch quantitativ vorausberechnen".

Dieses Verfahren würde die Verringerung des Wirkungsgrades infolge der Störströme und die Abweichung⁺⁾ infolge der (nur näherungsweise gültigen) Optimalbedingung $\frac{\tau}{\tau_A} = \frac{1}{2}$ nicht voneinander trennen. Beide Einflüsse würden vermischt. Als systematische Arbeitsmethode würde dieses Vorgehen lediglich eine Harmonisierung von Rechnung und Beobachtung durch empirische Störgrößen herbeiführen.

9. Dickel [19] betrachtete die Entnahmenenden der Trennrohre. Er untersuchte den differentiellen Wirkungsgrad der zylindrischen Rohr-Endstücke (0,5 m lang). Sie arbeiteten in den experimentellen Staffelanlagen mit maximaler Trennschärfe. Dickel verglich die Experimente [10][12][13] mit seiner differentiellen Optimalbedingung und findet: "Die berechneten Werte sind in befriedigender Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen". Andererseits liefert Dickels integrale Optimaltheorie [28] gerade am Entnahmeende eine vom Experiment ($\xi=1$) stark abweichende geometrische Dimensionierung ($\xi=0$). Vgl. Abb.43a,c.

Dieser Widerspruch am kritischen Entnahmeende bestätigt indirekt das Ergebnis unserer Rechnung ($\xi=1$).

10. Zusammenfassend ist festzustellen: Die zylindrische Optimaltheorie ließe den von Dickel seit 1950 gesuchten Hauptgrund für die ungeklärte Diskrepanz des Wirkungsgrades zwischen Theorie und Experiment um 1 bis 2 Zehnerpotenzen zwanglos verstehen.

Clusius und Dickel haben in ihren experimentellen Pionierarbeiten [10][12][13] die Leistungsgrenze der Laboranlagen hiernach bereits erreicht. Eine wesentliche Steigerung des Wirkungsgrades ist im Bereich der Laboranlagen nicht mehr möglich.

⁺⁾ Trütsch findet durch diese Methode bei seinen Experimenten einen maximalen Nutzungsgrad $n > 1$. Dieser Widerspruch zeigt die Unhaltbarkeit des Verfahrens bei Laboranlagen.

33. Anwendungsmöglichkeiten

Der Wirkungsgrad optimierter Thermodiffusionskaskaden ist von ihrer Produktionsleistung s abhängig.

1. Wir untersuchen den normierten Wirkungsgrad $n = \frac{\eta_{th\,zyl}}{\eta_{th\,plan}} \bar{\sigma}$ (Nutzungsgrad) als Funktion der reduzierten Entnahme $\bar{\sigma}$ nach Kap.21. Hierzu berechnen wir alle optimalen Trennanlagen, die das Chlorisotop $H^{37}Cl$ von $c_A = 24,3\%$ auf $c_E = 99,4\%$ anreichern. Wir lassen die gewünschte Soll-Produktionsleistung $\bar{\sigma} = \frac{s}{s_0}$ kontinuierlich von Null aus anwachsen. Dadurch ändert sich auch kontinuierlich die geometrische Dimensionierung und der optimale Nutzungsgrad der optimierten Trennrohre. Das Ergebnis ist in Abb. 44 dargestellt.

Der geringe Wirkungsgrad von Laboranlagen ist auch ohne explizite Rechnung durch eine qualitative Überlegung direkt verständlich:

- a. Eine Trennung ohne Entnahme ($\bar{\sigma} = 0$) hat mit Sicherheit den Wirkungsgrad $\eta_{th\,zyl} = 0$. Sie liefert keine Trennleistung ($\dot{A} = 0$), verbraucht aber einen erheblichen Leistungsbeitrag ($\dot{Q} \gg 0$). Allein schon die stationäre Aufrechterhaltung einer entnahmefreien Konzentrationsschichtung erfordert wegen der ständigen Rückdiffusion einen laufenden Leistungsaufwand⁺).

⁺) Im entnahmefreien Fall arbeitet man nach Waldmann [79] mit minimaler Heizleistung, wenn man $\xi = 1$ wählt. Nach Fleischmann und Jensen [37] frisst die Rückdiffusion dann 2/3 des gesamten Energieverbrauchs auf. Man könnte einwenden, daß man auch im entnahmefreien Fall nach den Formeln von Krasny-Ergen [51] nur $\xi = 2$ zu wählen bräuchte, um die Rückdiffusion zurückzudrängen. Aus denselben Formeln ergäbe sich aber gleichzeitig die Plattenbreite bzw. der mittlere Rohrumgang Null. Damit wäre aber jede Konvektion unterbunden. Die Annahme, in diesem Kapillarspalt bzw. Kapillarrohr trete keine Rückdiffusion längs einer vorgegebenen Konzentrationsschichtung auf, würde eine Verletzung des 2. Hauptsatzes bedeuten. Die Kritik der Optimierung Waldmanns durch Krasny-Ergen verliert in diesem wichtigen Grenzfall ihre Gültigkeit: Die Optimierung Krasny-Ergens ist, wie alle anderen linearen Theorien, auf Großanlagen beschränkt.

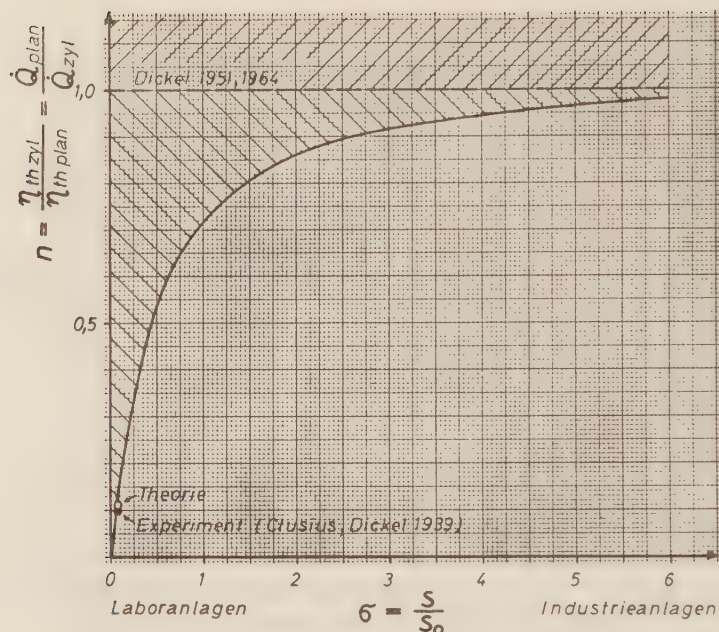


Abb.44 : Die maximale Energieausnutzung optimierter Trennröhre in Abhängigkeit von ihrer Soll-Trennleistung.

Dargestellt ist der normierte Wirkungsgrad (Nutzungsgrad n) optimaler Thermodiffusionsanlagen als Funktion der normierten Soll-Entnahme σ am Beispiel der Anreicherung des Chlorisotops H^{37}Cl von 24,3 % auf 99,4 %.

Die gestrichelte Linie stellt die prinzipielle obere Grenze der Energieausnutzung dar. Sie kann infolge der Irreversibilität des Thermodiffusionseffektes unmöglich überschritten werden. n -Werte zwischen der gestrichelten Linie und der ausgezogenen Kurve sind nach dem zweiten Hauptsatz unmöglich: Der Unterschied zwischen Dickels oberer Grenze und der vorliegenden Theorie beruht auf der Rückdiffusion längs der optimalen Trennröhre.

Das klassische Experiment von Clusius und Dickel (1939) hat bereits nahezu das Optimum der Thermodiffusionstrennung für die Sollproduktion von $\sigma = 0,07 \pm 8$ cm³/Tag erreicht. Der geringe Unterschied zwischen Theorie und Experiment beruht auf parasitären Störströmungen im Gasumlauf und auf einer kleinen Abweichung von der optimalen Dimensionierung.

- b. Eine Trennung mit geringer Entnahme ($\sigma \approx 0$) muß diese Ballast-Leistung zunächst voll mit aufbringen. Die Ballast-Leistung ist ja gerade die Voraussetzung dafür, daß überhaupt eine Konzentrationsschichtung in der Gassäule stationär existiert, aus der dann entnommen werden kann.
 - c. Bei gesteigerter Entnahme ($\sigma \gg 0$) wird die Rückdiffusion in optimierten Anlagen durch die im Mittel größere Spaltweite ($1 \leq \xi \leq 2$) so weit zurückgedrängt bzw. vernachlässigbar, daß der Wirkungsgrad nicht mehr von der Produktionskapazität σ abhängt. Er bleibt (bei fester Anfangs- und Endkonzentration) asymptotisch konstant.
2. Für die praktischen Anwendungsmöglichkeiten des Thermodiffusionsverfahrens ergeben sich daraus folgende Aspekte:
- a. Soll eine bestimmte Isotopenmasse (etwa 10 g $H^{37}Cl$) mit vorgegebener Endkonzentration c_E hergestellt werden, so lassen sich unendlich viele Thermodiffusionskaskaden angeben, die dieses Problem lösen (Kap.26, Punkt 1). Man hat dabei die Wahl der Produktionsgeschwindigkeit s : Man könnte etwa 1. mit einer Entnahme $s = 10$ mg/Tag 3 Jahre lang kontinuierlich trennen, oder 2. mit einer Entnahme $s = 1$ g/Tag 10 Tage lang trennen (zusätzlich Anlaufzeit). In beiden Fällen hätte man dieselbe Trennung. Der Aufwand ist aber verschieden: Im 1. Fall ist der gesamte Energieverbrauch wesentlich höher, im 2. Fall ist der apparative Aufwand⁺⁾ wesentlich höher. Das Minimum des Gesamtaufwands (Energiekosten + Apparatkosten) ist also - je nach der gegebenen Ausgangskonzentration, der gewünschten Endkonzentration und der gewünschten Entnahme - in jedem Einzelfall speziell zu bestimmen.
 - b. Geht man von kleineren Laboranlagen (Ausbeute $\leq$ mg/Tag) bei gleicher Trennschärfe ($c_A, c_E = \text{const}$) zur Großproduktion im Industriemaßstab (Ausbeute $\geq$ g/Tag) über, so steigt die Energieausnutzung steil an⁺⁺⁾. Bei kleiner

⁺⁾ Die apparative Investition kann man etwa proportional zur Rohrmantelfläche F ansetzen. Sie läßt sich durch Anwendung erhöhten Trenndruckes verringern (Kap.26, Punkt 1).

⁺⁺⁾ siehe nächste Seite.

Sollentnahme ist dieser Anstieg zunächst direkt proportional zur Produktionskapazität σ . Bei größeren Anlagen nähert er sich dann asymptotisch einem Grenzwert

$$\left(\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \eta_{th, zyl} = \eta_{th, plan} \right).$$

3. Will man einen hohen thermodynamischen Wirkungsgrad erzielen, so ist es in jedem Fall günstiger, von den kleineren Laboranlagen zu größeren Anlagen überzugehen.

Aber auch dann ist die obere Schranke $\eta_{th} < \frac{\alpha^2}{100} < \frac{1}{400} \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2$ wegen der Irreversibilität des Elementareffektes nicht überschreitbar.

Bei der Konkurrenz des Wirkungsgrades sind die reversiblen Isotopentrennverfahren prinzipiell überlegen. Ihr η_{th} ist keinen grundsätzlichen Einschränkungen nach oben hin unterworfen (Kap.18). Die Gegenstromzentrifuge kann, technisch durchentwickelt, einen um Größenordnungen höheren energetischen Nutzeffekt erzielen, als das irreversible Trennrohr [47][19]. Bei großen Produktionskapazitäten würden dadurch die hohen apparativen Investitionskosten der Präzisionsrotoren ausgeglichen.

Im Vergleich zu anderen Trennmethode kann das Thermodiffusionsverfahren also nur in solchen Fällen zur Großproduktion wirtschaftlich eingesetzt werden, in denen ein genügend grosser Thermodiffusionsfaktor α zur Verfügung steht.⁺⁾ Seine konkurrenzlos niedrigen apparativen Investitionskosten können es aber in solchen Fällen rentabel machen, in denen die laufenden Energiekosten größer sind als bei den anderen Trennmethode. Der praktische Anwendungsbereich des Trennrohrs, der bisher fast ausschließlich auf den Labormaßstab beschränkt war, kann daher mit beträchtlichem Leistungsgewinn auf mittlere Produktionskapazitäten erweitert werden.

++) Dickel und Trötsch wenden ihre lineare Theorie auf Laboranlagen an [29][24][76]. Ihre Schwierigkeiten haben folgenden Grund: Wegen der Linearität ihrer Theorie ist ihr Wirkungsgrad von der Entnahme unabhängig. Daher erscheint die Produktionsgeschwindigkeit als "Freiheitsgrad", der "einfach dadurch herein(kommt), daß ... die Entnahme willkürlich festgelegt werden kann" [21].

+) am Ende des Kapitels.

Als Laborgerät zur präparativen Darstellung kleiner Isotopenmengen ist das Trennrohr in jedem Fall das einfachste und wirksamste instrumentelle Hilfsmittel der Grundlagenforschung.

+) Für die wichtige Urantrennung wurde zunächst die Thermodiffusion mit gasförmigem UF_6 vorgeschlagen. Später stellte sich heraus, daß der Thermodiffusionsfaktor des Systems $^{235}UF_6 / ^{238}UF_6$ verschwindend klein ist. Flüssiges UF_6 hat einen viel größeren Thermodiffusionsfaktor ($\alpha = 0,01$). Daher arbeitete die bisher einzige Großversuchstrennanlage aus 2100 Trennrohren mit flüsigem UF_6 [1] [71]. Doch war der Wirkungsgrad des Thermodiffusionsverfahrens auch in diesem Fall nicht groß genug, um neben dem heute verwendeten Diffusionsverfahren großtechnisch wirtschaftlich eingesetzt werden zu können [71]. Das Diffusionsverfahren benötigt bei gleicher Trennleistung nur etwa 2% des Energiebedarfs der Thermodiffusion [2]. Die jüngste technische Entwicklung der Gegenstromzentrifuge durch Groth [45] hat einen Grad von technischer Vervollkommenung erreicht, der sie gegenüber dem irreversiblen Hertz'schen Diffusionsverfahren an praktischem Interesse gewinnen läßt.

Für die Einführung in das Arbeitsgebiet der Isotopentrennung danke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof.Dr.R.Fleischmann. Er hat die Arbeit am Trennrohr mit seinem steten Interesse begleitet.

Dank sage ich auch Herrn Prof.Dr.L. Waldmann und Herrn Dr.S.Hess für Diskussionen.

Mein Freund cand.phys. R.Schmidt-Whitley hat die Integrale numerisch tabelliert. Ich danke ihm herzlich.

ANHANGBerechnungsschema

Für den praktischen Gebrauch stellen wir das Rechenschema zur Optimierung von Trennrohranlagen in Form einer knappen Anleitung zusammen.

Die Kaskadenberechnung zerfällt in zwei Teile:

1. Berechnung der vier charakteristischen Größen:

R_o = Charakteristische Spaltweite

L_o = Charakteristische Rohrlänge

s_o = Charakteristische Entnahme

$\dot{Q}_o$ = Charakteristischer Wärmestrom.

2. Berechnung der geometrischen Dimensionierung und der Leistungsaufnahme:

$$\xi = \frac{R_a - R_i}{R_o} = \text{Reduzierte Spaltweite}$$

$$\eta = \pi \frac{R_a + R_i}{R_o} = \text{Reduzierter mittl. Rohrumfang}$$

$$\zeta = \frac{z}{L_o} = \text{Reduzierte Rohrlänge}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_o \zeta = \text{Leistungsaufnahme.}$$

Die für das jeweilige Trenngas charakteristischen Parameter $R_o, L_o, s_o, \dot{Q}_o$ kann man aus den gaskinetischen Daten und dem ins Auge gefaßten (konstanten) Radienverhältnis berechnen:

$$R_o = 7,25 \sqrt[3]{\frac{D\eta}{g\varphi} \frac{\bar{T}}{\Delta T}}$$

$$L_o = R_o \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\bar{T}}{\Delta T} \right) \cdot \frac{\psi}{\varphi}$$

$$s_o = R_o^4 \frac{\varphi^2 g \alpha}{244 \eta} \left(\frac{\Delta T}{\bar{T}} \right)^2 \cdot \frac{\frac{R_o}{R_i} + 1}{\frac{R_o}{R_i} - 1} \cdot \varphi$$

$$\dot{Q}_o = \lambda \Delta T \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

Allerdings ist die Temperaturabhängigkeit der Gaskoeffizienten meist nur sehr ungenügend bekannt, ebenso die mittlere Temperatur $\bar{T}$ selbst, bei der man sie einzusetzen hat. Die Formfaktoren φ, ψ hängen von $\frac{R_a}{R_i}, \frac{T_i}{T_a}$ und vom jeweiligen Gasmodell ab und liegen in der Größenordnung von 1.

Sicherer als theoretische Formeln sind daher für die praktische Konstruktion experimentelle Werte. Man gewinnt sie leicht an einem kurzen zylindrischen Probetrennrohr von konstantem Querschnitt mit dem gewünschten Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ und den gewünschten Temperaturen T_1, T_a . Man betreibt es entnahmefrei und mißt bei zwei verschiedenen Drucken (oberhalb und unterhalb des vorgesehenen Trenndruckes p bzw. bei $\xi \geq 1$) die Gleichgewichtskonzentrationen c_a, c_e an den Rohrenden. Aus den beiden Werten für die Trennschärfe $\ln \frac{c_e c_a'}{c_a c_e'} = \frac{z}{K/H}$ kann man dann (wegen $K/H = L_o (\xi^4 + \frac{2}{\xi^2})$) und der bekannten Druckabhängigkeit von R_o und L_o) die zwei Parameter R_o und L_o für den gewünschten Trenndruck p getrennt bestimmen.

Zur Gewinnung der charakteristischen Entnahme s_o mißt man den Anfangstransport $\tau_A = H c c' = s_o \xi^4 c c'$ (z.B. aus dem Grenzwert $\tau_A = \lim_{c \rightarrow \infty} s(c - c_a)$ des Eigentransportes bei großer kontinuierlicher Entnahme s nach Kap.31).

Der charakteristische Wärmestrom $\dot{Q}_o$ ergibt sich experimentell unmittelbar aus Heizleistung/Rohrlänge.

Hat man die für das jeweilige Trenngas charakteristischen Kenngrößen $R_o, L_o, s_o, \dot{Q}_o$ der Trennung theoretisch und/oder experimentell bestimmt, so geht man zu einer dimensionslosen Schreibweise ($\xi, \eta, \zeta, \sigma = \frac{z}{z_o}$) über. Man berechnet die Rohrgeometrie ξ, η, ζ und die Leistungsaufnahme $\dot{Q}$ für das vorgegebene Trennproblem c_A, c_E, s aus der folgenden c-Parameterdarstellung. Man gibt sich dabei bestimmte Werte der Konzentration c vor und berechnet die zugehörigen Werte $\xi(c), \eta(c), \zeta(c)$ um daraus die direkten Werte der Spaltweite $R_a - R_i$, des mittleren Spaltumfangs $\pi(R_a + R_i)$ und der Rohrlänge z längs der Kaskade zu erhalten. Die mathematische Berechnung des opti-

malen Kaskadenschemas wird in einen E n d t e i l und einen A n f a n g s t e i l zerlegt.

Die Berechnung beginnt am Entnahmeende (c_E) des Endteils. Hier ist die reduzierte Spaltweite stets $\xi(c_E) = 1$ und von hier aus wird die reduzierte Rohrlänge ζ gezählt. Der Endteil hört an derjenigen Stelle c^* auf, an der $\xi(c^*) = 2$ (Turbulenzgrenze) erreicht wird - sofern dieser Fall überhaupt eintritt. Von dieser Stelle c^* aus wird die Rohrlänge ζ des Anfangsteils und dessen Energieverbrauch $\dot{Q}$ gerechnet. Die gesamte Rohrlänge und die Gesamtheizleistung setzen sich dann additiv aus den Beiträgen von Endteil und Anfangsteil zusammen.

Im E n d t e i l ($1 \leq \xi \leq 2$) ist $\frac{R_a}{R_i} = \text{const}$, $R_a - R_i \neq \text{const}$:

$$\xi(c) = \sqrt[4]{2\sigma \frac{c_E - c}{cc'} + \frac{1}{1 + \frac{1}{9} \cdot 2\sigma \frac{c_E - c}{cc'}}$$

$$\eta(c) = \xi(c) \cdot \pi \frac{\frac{R_a}{R_i} + 1}{\frac{R_a}{R_i} - 1}$$

$$\zeta(c) = 4\sigma \int_c^{c_E} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc + 3 \int_c^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{8}{3}(c_E - c)}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 L_0 \cdot \zeta(c^*) .$$

Im A n f a n g s t e i l ist $\frac{R_a}{R_i} \neq \text{const}$, $R_a - R_i = \text{const}$:

$$\xi(c) = 2$$

$$\eta(c) \approx \eta(c^*) \cdot \frac{c^* c'}{c_E - c^*} \cdot \frac{c_E - c}{cc'}$$

$$\zeta(c) = 33 \int_c^{c^*} \frac{dc}{cc'}$$

$$\dot{Q} \approx \lambda \Delta T \frac{L_0}{R_0^4 h} \cdot 4s \int_{c_a}^{c^*} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc .$$

Die auftretenden Integrale sind anhand der Textabbildungen graphisch-numerisch auswertbar.

Der Rechenausdruck $\frac{c_E - c}{cc'}$ kann für die verschiedenen c-Werte am schnellsten graphisch aus Abb. 16 gefunden werden. Mit dem Hilfsparameter $\Sigma = 25 \frac{c_E - c}{cc'}$ erhält man dann ebenso rasch die variable Trennspaltweite ξ des Endteils graphisch aus Abb. 24. Das komplizierte Integral $3 \int_0^{c_E} \frac{dc}{cc' + \frac{1}{3}(c_E - c)}$ kann man durch die meist sehr gute Näherung $E(\Sigma) \cdot \ln \frac{c_E c'}{c c}$ leicht aus den beiden Abb. 26 und 13 graphisch gewinnen (vgl. Kap. 20, Punkt 3^{*)}).

Ein numerisches Beispiel soll die Anwendung veranschaulichen.

RECHENBEISPIEL^{*)}:

Trennproblem: Es soll eine isotope Molekülsorte von der Anfangskonzentration $c_A = 5\%$ auf die Endkonzentration $c_E = 50\%$ bei einer täglichen Produktionsrate von s Gramm mit minimalem Aufwand angereichert werden.

Arbeitsbedingungen: Hierzu legt man zunächst die äußeren Betriebsbedingungen (Trenndruck p, Temperaturen T_1, T_a , Radienverhältnis $\frac{R_a}{R_i}$) nach praktischen Gesichtspunkten fest, um zu geeigneten Baumaßen zu gelangen.

Gaskinetische Größen: Nach Bestimmung der mittleren Trenngas-temperatur $\bar{T}$ kann man die Literaturwerte der Gaskoeffizienten $\lambda, \rho, \eta, D, \alpha$ bei $\bar{T}$ abschätzen.

Hilfsgrößen: Hieraus lassen sich dann die charakteristischen Größen $R_o, L_o, s_o, \dot{Q}_o$ aus den theoretischen Gleichungen näherungsweise berechnen. Andernfalls bestimmt man sie experimentell in einem Modellversuch.

Geometrische Größen: Damit kann man die Berechnung der optimalen Rohrgeometrie in der dimensionslosen Schreibweise ξ, η, ζ formulieren und numerisch oder schneller graphisch auswerten.

^{*)} Dieses Beispiel ist in Abb. 32 anschaulich dargestellt. Siehe auch das praktische Beispiel der $H^{35}Cl/H^{37}Cl$ -Trennung in Kap. 32.

Rechenschema für $\sigma = 3$:

c	Σ	ξ	η	z	Bemerkungen
0,50	0	1,00	-	0	Entnahmeende
0,45	1,21	1,21	-	0,78	
0,40	2,50	1,34	-	2,01	
0,35	3,95	1,47	-	3,82	
0,30	5,70	1,59	-	6,35	
0,25	8,00	1,71	-	10,2	
0,20	11,3	1,85	-	16,0	
0,15	16,4	2,0	η^*	25,7	
0,10	-	2,0	$1,63 \eta^*$	15,3	Einspeisende
0,05	-	2,0	$3,47 \eta^*$	40,0	

Gesamte Rohrlänge:

$$z = (25,7 + 40,0)L_0.$$

Gesamtheizleistung:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 L_0 25,7 + \frac{\lambda \Delta T}{R_0^2 h} L_0 \cdot 4,3 \int_{0,05}^{0,15} \frac{c_E - c}{(cc')^2} dc.$$

Den Verlauf von R_a, R_1 längs z erhält man durch elementare Umrechnung.

LITERATUR

- [1] Abelson, P.N. und Hoover, J.I.:
 Proceedings of the Symposium on Isotope
 Separation, S.483, Amsterdam 1958
- [2] Alexander, K.F.:
 "Isotopentrennung durch Thermodiffusion
 in flüssiger Phase",
 Fortschr.Phys.8, 1 (1960)
- [3] Bardeen, J.:
 "Concentration of isotopes by thermal
 diffusion; rate of approach to equi-
 librium", Phys.Rev.57, 35 (1940)
- [4] Barwich, H.:
 "Zur Frage der Annäherung einer idealen
 Isotopentrennungsanlage durch eine
 treppenförmig abgestufte Kaskade im
 verlustfreien Fall und bei Berücksich-
 tigung stofflicher Verluste".
 Ann.Phys.(6) 20, 70 (1957)
- [5] Becker, E.W.:
 "Trennröhr mit hohem Druck und radialem
 elektrischen Feld, II. Erscheinungen der
 Turbulenz", Z.Naturf. 2a, 450 (1947)
- [6] Becker, R.:
 "Theorie der Wärme", S.53,
 Springer-Verlag 1964
- [7] Berl, W.G.:
 "Physical Methods in Chemical Analysis",
 Bd.4, Artikel von Dickel, G.:
 "Separation of Gases and Liquids by
 Thermal Diffusion", S.267,
 Academic Press, New York 1961

- [8] Bowring, R.W.:
Atomic Energy Research Establishment
Harwell Report AERE - GP/R - 2058,
Part I (1957)
- [9] Chapman, S.:
"The possibility of separating Isotopes"
Phil.Mag.38, 182 (1919)
- [10] Clusius, K. und Dickel, G.:
"Das Trennrohr I", Z.Phys.Chem.(B)
44, 397, 451 (1939)
- [11] Clusius, K. und Dickel, G.:
"Das Trennrohr IV", Z.Phys.Chem.(B)
52, 348 (1942)
- [12] Clusius, K. und Dickel, G.:
"Das Trennrohr V", Z.Phys.Chem.(A)
193, 274 (1944)
- [13] Clusius, K. und Becker, E.W.:
"Das Trennrohr VI",
Z.Naturf.2a, 154 (1947)
- [14] Clusius, K. und Franzosini, P.:
"Das Trennrohr XX",
Z.Naturf.12a, 621 (1957)
- [15] Cohen, K.: "The Theory of Isotope Separation as
applied to the Large-Scale Production
of U^{235} ", S.131, Mc Graw-Hill,
New York 1951
- [16] Collatz, L. und Wetterling, W.:
"Optimierungsaufgaben", Heidelberger
Taschenbücher, Bd.15, Springer-Verlag
1966
- [17] David, E.: "Isotopentrennung mit kontinuierlich
arbeitenden Trennrohren",
Z.Phys. 134, 377 (1953)

- [18] Debye, P.: "Zur Theorie des Clusius'schen Trennungsverfahrens", Ann.Phys.56, 284 (1939)
- [19] Dickel, G.: "Der thermodynamische Wirkungsgrad bei kontinuierlich arbeitenden Isotopentrennungsvorrichtungen", Z.Phys. Chem. 197, 197 (1951)
- [20] Dickel, G.: "Das asymmetrische Trennrohr" Z.Naturf.16a, 755 (1961)
- [21] Dickel, G. und Schildknecht, D.: "Das Transformationsprinzip der Trennröhrkaskaden" Z.Naturf.18a, 105 (1963)
- [22] Dickel, G.: "Transformationstheorie der Trennkaskaden I", Nukleonik 5, 311 (1963)
- [23] Dickel, G.: "Transformationstheorie der Trennkaskaden II", Nukleonik 5, 316 (1963)
- [24] Dickel, G. und Trötsch, E.: "Transformationstheorie der Trennkaskaden III", Nukleonik 7, 85 (1964)
- [25] Trötsch, E. und Dickel, G.: "Transformationstheorie der Trennkaskaden IV", Nukleonik 7, 383 (1965)
- [26] Trötsch, E. und Dickel, G.: "Transformationstheorie der Trennkaskaden V", Nukleonik 8, 74 (1966)
- [27] Dickel, G. und Trötsch, E.: "Methoden zur Berechnung von optimal arbeitenden Kaskaden zur Isotopentrennung", Isotopenpraxis 2, 429 (1966)
- [28] Dickel, G.: "Die Transformationstheoreme der Trennkaskaden", Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 7, 17 (1964)

- [29] Dickel, G.: "Die Trennkaskaden bei den Diffusionsverfahren", Kerntechnik, Isotopentechnik und -chemie, 6, 561 (1964)
- [30] Trötsch, E. und Dickel, G.:
"Die Berechnung von gestaffelten Trennkaskaden bei Diffusionsverfahren", Kerntechnik, Isotopentechnik und -chemie 8, 18 (1966)
- [31] Dirac, P.A.M.: in [15], S.14 (1941)
- [32] Donaldson, J. und Watson, W.W.:
"Effect of Turbulence in Thermal Diffusion Columns", Phys.Rev.82, 909 (1951)
- [33] Einstein, A.:
"Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Ann.Phys.17, 549 (1905)
- [34] Farber, M. und Libby, W.F.:
"Effect of gravitational field on the thermal diffusion separation method", J.Chem.Phys.8, 965 (1940)
- [35] Fleischmann, R.:
"Anreicherung von ^{15}N nach dem Trennrohrverfahren von Clusius und Dickel", Phys.Z. 41, 14 (1940)
- [36] Fleischmann, R.:
"Dampfdruckmessung reaktionsfähiger Stoffe", Naturw. 29, 485 (1941)
- [37] Fleischmann, R. und Jensen, J.H.D.:
"Das Trennrohr (nach Clusius und Dickel)" Erg.Exakt.Naturw. 20, 121 (1942)
- [38] Fleischmann, R.:
Forschungsbericht (1944), unveröffentlicht

- [39] Hengevoss, J. und Fleischmann, R.:
"Modellversuch zur kontinuierlichen
Isotopentrennung", Z.Phys.137, 265 (1954)
- [40] Furry, W.H., Jones, R.C., Onsager, L.:
"On the Theory of Isotope Separation by
Thermal Diffusion", Phys.Rev.55, 1083 (1939)
- [41] Furry, W.H. und Jones, R.C.:
"Isotope Separation by Thermal Diffusion:
The Cylindrical Case", Phys.Rev.69, 459 (1946)
- [42] Grew, K.E. und Ibbs, T.L.:
"Thermodiffusion in Gasen" Deutscher Verlag
der Wissenschaften, Berlin 1962
- [43] Grinten, W.van der:
"Zur Theorie des Gastrennungsverfahrens
von Clusius und Dickel", Naturw.27, 317 (1939)
- [44] Groot, S.R. de:
"Thermodynamik irreversibler Prozesse",
Bibliographisches Institut, Bd.18/18a,
Mannheim 1960
- [45] Groth, W.: "Deutsche Verfahren zur Anreicherung der
Uran-Isotope", Chem.Ing.Techn.31, 310 (1959)
- [46] Heisenberg, W.:
"Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen", Ann.Phys.74, 577 (1924)
- [47] Houtermans, F.G.:
"Über den Energieverbrauch bei der Isotopentrennung", Ann.Phys.40, 493 (1941)
- [48] Jensen, J.H.D.:
"Das Clusius-Dickelsche Trennrohr und
die physikalisch-mathematische Theorie
seiner Wirkungsweise und Leistungsfähigkeit", Angew.Chemie, 54, 405 (1941)

- [49] Jensen, J.H.D. und Waldmann, L.:
"Zur Theorie des Clusius'schen Trenn-
rohrs, Naturw.29, 467 (1941) .
- [50] Jones, R.C. und Furry, W.H.:
"The Separation of Isotopes by Thermal
Diffusion", Rev.Mod.Phys.18, 151 (1946)
- [51] Krasny-Ergen, W.:
"The optimal dimensions of a Clusius-
Dickel isotope separator",
Phys.Rev.58, 1078 (1940)
- [52] Landau, L.D. und Lifschitz, E.M.:
"Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd.IV,
Hydrodynamik", S.114 Akademie-Verlag,
Berlin 1966
- [53] London, H.: "Separation of Isotopes", S.295
Newnes Ltd., London 1961
- [54] Majumdar, S.D.:
"The Theory of the Separation of Isotopes
by Thermal Diffusion", Phys.Rev.81, 844 (1951)
- [55] Martin, H. und Kuhn, W.:
"Multiplikationsverfahren zur Trennung
von Gasgemischen, insbesondere bei An-
wendung von Schwerfeldern",
Z.Phys.Chem.(A) 189, 284 (1941)
- [56] Mc Inteer, B.B.und Reisfeld, M.J.:
Los Alamos Scientific Laboratory Report,
LAMS - 2517 (1961)
- [57] Meinrenken, J.:
"Das Paradoxon des Temperatureinflusses
im Trennrohr" Z.Naturf.22a, 1266 (1967)
- [58] Meixner, J.: " Zur Thermodynamik der Thermodiffusion",
Ann.Phys.39, 333 (1941)

- [59] Mulliken, R.S.:
 "The Separation of Isotopes by Thermal
 and Pressure Diffusion",
 J.Am.Chem.Soc.44, 1033 (1922)
- [60] Nier, A.O.: "The concentration of carbon 13 by
 thermal diffusion",
 Phys.Rev.57, 30 (1940)
- [61] Onsager, L.: "Separation of Gas (Isotope) Mixtures
 by Irreversible Processes"
 Phys.Rev.55, 1136 (1939)
- [62] Onsager, L. und Watson, W.W.:
 "Turbulence in Convection in Gases between
 Concentric Vertical Cylinders",
 Phys.Rev.56, 474 (1939)
- [63] Peierls, R.: in [15], S.29 (1940/42)
- [64] Planck, M.: "Vorlesungen über Thermodynamik",
 10.Aufl. S.214, de Gruyter, Berlin 1954
- [65] Raman, S. und Saxena, S.C.:
 "Thermal-Diffusion-Column-Shape Factors
 for a Gas Composed of Rigid Spherical
 Molecules", J.Chem.Phys.36, 3345 (1962)
- [66] Rayleigh, Lord: Sci.Papers 6, 197 (1913)
- [67] Reinhold, G.:
 "Theorie und Berechnung der Formfaktoren
 von Thermodiffusionskolonnen",
 Z.Phys.Chem.224, 384 (1963)
- [68] Saxena, S.C. und Raman, S.:
 "Theory and Performance of Thermal-
 -Diffusion Column",
 Rev.Mod.Phys.34, 252 (1962)
- [69] Seaborg, G.T., Wahl, A.C., Kennedy, J.W.:
 "Thermal diffusion separation of radio-
 active and ordinary hydrogen isotopes",
 J.Chem.Phys.8, 639 (1940)

- [70] Simon, R.: "Performance of a Hot-Wire Clusius and Dickel Column",
Phys.Rev.68, 596 (1946)
- [71] Smyth, H.D.:
"Atomic Energy for Military Purposes"
Rev.Mod.Phys.17, 351 (1945)
- [72] Sommerfeld, A.:
"Vorlesungen über theoretische Physik"
Bd.2, 4.Aufl., S.265, Leipzig 1957
- [73] Steinwedel, H.:
"Über den Energieverbrauch im Clusius-
schen Trennrohr beim kontinuierlichen
Betrieb", Die Chemie 55, 152 (1942)
- [74] Tollmien, W.:
"Ein allgemeines Kriterium der Insta-
bilität laminarer Geschwindigkeits-
verteilungen", Göttinger Nachr. math.-
phys. Kl.Fachgr.I, 1, 79 (1935)
- [75] Trautz, M. und Narath, A.:
"Die innere Reibung von Gasgemischen"
Ann.Phys.79, 637 (1926)
- [76] Trötsch, E.:
"Untersuchungen des optimalen Wirkungs-
grades einer Trennrohrkaskade unter
besonderer Berücksichtigung des Ein-
flusses der parasitären Ströme",
Diss.Univ.München 1964
- [77] Vasaru, G.:
"Thermal Diffusion in Isotopic Gaseous
Mixtures", Fortschr.Phys.15, 1 (1967)
- [78] Waldmann, L.:
"Zur Theorie des Gastrennungsverfahrens
von Clusius und Dickel",
Naturw.27, 230 (1939)

- [79] Waldmann, L.:
"Zur Theorie des Isotopentrennverfahrens
von Clusius und Dickel", Z.Phys.114, 53 (1939)
- [80] Waldmann, L.:
"Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck", Handbuch der Physik, Bd.12,
Springer-Verlag 1958
- [81] Watson, W.W.:
"Methods of increasing the efficiency
of thermal diffusion columns",
Z.Phys.133, 272 (1952)
- [82] Wirtz, K.: "Zur Kinetik der Thermodiffusion in
Flüssigkeiten", Ann.Phys.36, 295 (1939).

Lebenslauf

Am 4.7.1936 wurde ich, Eberhard Franck, in Nürnberg als Sohn des Diplomingenieurs Dr.-Ing. Siegfried Franck und seiner Ehefrau Lydia geb. Beneke geboren.

1942 trat ich in die Volksschule in Nürnberg ein, 1946 in das Humanistische Neue Gymnasium in Nürnberg. Hier legte ich 1954 das Abitur ab.

1954 begann ich das Physikstudium an der Universität Erlangen-Nürnberg. 1960 legte ich die Diplomvorprüfung ab. Im Verlauf des Studiums war ich als Industriepraktikant bei den Siemens-Werken tätig: Gießerei, Wechselstromrechnung, Physikalisch-Chemisches Labor, Forschungslabor, Reaktorstation (Garching). 1960 - 65 erhielt ich ein Stipendium der Siemens-Werke.

1965 legte ich die Diplomhauptprüfung ab. Meine Diplomarbeit beschäftigte sich mit Trennrohrexperimenten. 1965 heiratete ich die Medizinstudentin Gesine Däum.

Die vorliegende Arbeit wurde am Physikalischen Institut der Universität von Oktober 66 bis September 67 angefertigt.

Offsetdruck - Fotodruck

Josef Hög

8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz,) Tel. 22990

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
